CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 9 **SOLUCIONES** **(Curso 2024–2025)**

1.– Un tramo de autopista está iluminado por numerosas luminarias. El encargado de mantenimiento, dado el coste de mano de obra en la labor de sustitución de las bombillas, decide sustituir todas las bombillas del tramo simultáneamente. Se consideran dos posibles estrategias de sustitución:

1) Sustituir todas las bombillas cuando se ha fundido el 15 %.

2) Sustituir todas las bombillas cuando se ha fundido el 30 %.

El operario tiene a su disposición dos tipos de bombillas de igual coste:

- **Tipo A:** La vida de cada bombilla en horas tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.0004$ h^{-1}.
- **Tipo B:** La vida de cada bombilla en horas es normal con media $m = 1100$ h. y desviación típica $\sigma = 250$ h.

Se pide:

a) ¿Cuál es el número esperado de horas de funcionamiento del sistema de iluminación del tramo de autopista si se eligen las bombilla del tipo A y se sigue la primera estrategia? ¿Y si se sigue la segunda estrategia?

b) Repetir el apartado anterior con las bombilla de tipo B.

c) ¿Qué bombilla deberían comprarse a igualdad de precio?

——————————SOLUCIÓN——————————

Supongamos que n es el número de lámparas instaladas en este tramo de autopista. Sea X la variable aleatoria "vida de una lámpara"; las duraciones de las n lámparas vienen descritas por n variables $X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n$ que suponemos son independientes y con la misma distribución que X. Supongamos ahora que $Y_1,\ Y_2,\ \ldots, Y_n$ son las variables $X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n$ ordenadas de menor a mayor. La vida del sistema, es decir, el tiempo hasta que se sustituyen las lámparas, viene dada por la variable $Y_{[np]}$ donde $p = 0.15$ (en la primera estrategia) y $p = 0.3$ (en la segunda), y $[np]$ es la parte entera de np. Si por ejemplo $n = 1000$ y $p = 0.15$, el sistema se cambiará cuando se estropee la lámpara número $150 = 1000 \cdot 0.15$, ordenadas por duración.

La distribución de la variable $Y_{[np]}$ es difícil de determinar con exactitud. Sin embargo, es natural suponer que cuando n es grande (como es el caso, según el enunciado), su valor esperado se podrá aproximar por el cuantil p de la variable X, es decir, por el valor x_p tal que $F_X(x_p) = p$: el valor esperado del momento en que se estropeará el 15 % de las lámparas debe estar próximo a la duración que no sobrepasa el 15 % de las l ámparas de ese tipo, si el número de lámparas examinadas es suficientemente grande.

a) X es exponencial con $\lambda = 4 \cdot 10^{-4}$ h^{-1}; el valor de x_p es la solución de la ecuación $F_X(x_p) = p$, es decir

$$1 - \mathrm{e}^{-\lambda x_p} = p$$

es decir, $x_p = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$. Para $p = 0.15$ (primera estrategia) obtenemos $x_p = 406.30$

horas. Para $p = 0.3$ (segunda estrategia), $x_p = 891.69$.

b) Si X es normal con media $m = 1100$ horas y desviación típica $\sigma = 250$ horas, el valor de x_p con $F_X(x_p) = p$ lo buscaremos en las tablas. Estandarizando obtenemos $x_p = m + \sigma \cdot z_p$ donde z_p es el cuantil p de la normal estándar Z, es decir, el valor tal que $F_Z(z_p) = p$. Si $p = 0.15$, $z_p = -1.036433$ y obtenemos $x_p = 840.89$ horas. Si $p = 0.3$, $z_p = -0.5244005$ y se obtiene $x_p = 968.9$ horas.

c) Es claro que son preferibles las lámparas de tipo B, si los costes son similares, ya que el número esperado de horas de funcionamiento del sistema es mayor con estas lámparas, en ambas estrategias.

2.– En una planta de hormigonado se sabe que si la temperatura del agua utilizada en la mezcla es superior a 25^o, la probabilidad de que la resistencia a compresión a 7 días sea superior a 0.65 veces la resistencia teórica a 28 días es del 70 %. Si la temperatura del agua es inferior a 25^o, esta misma probabilidad es del 20 %. La probabilidad de que la temperatura del agua, un día cualquiera, sea inferior a 25^o es de 0.9. Ensayamos a compresión un hormigón hecho hace 7 días y resulta una resistencia de 0.50 veces la resistencia a compresión teórica a 28 días. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura del agua el día que se hizo el hormigón fuera superior a 25^o?

————————SOLUCIÓN————————

Consideramos los sucesos "A =temperatura del agua superior a 25º" y "B=resistencia a compresión a 7 días superior a 0.65 veces la resistencia teórica a 28 días". Los datos de que disponemos son los siguientes: $P[B|A] = 0.7, P[B|\overline{A}] = 0.2$ y $P[\overline{A}] = 0.9$. Por tanto la probabilidad de que la temperatura del agua el día que se hizo el hormigón fuera supeior a 25º se calcula a través del teorema de Bayes del modo siguiente:

$$P[A|\overline{B}] = \frac{P[\overline{B}|A]P[A]}{P[\overline{B}|A]P[A] + P[\overline{B}|\overline{A}]P[\overline{A}]} =$$

$$= \frac{(1 - P[B|A])(1 - P[\overline{A}])}{(1 - P[B|A])(1 - P[\overline{A}]) + (1 - P[B|\overline{A}])P[\overline{A}]} = \boxed{0.04}$$

3.– En un cierto tramo de una carretera comarcal de dos sentidos pasan vehículos a razón de 3 vehículos por minuto en un sentido (sentido A) y 5 vehículos por minuto en el otro (sentido B). Se considera que la llegada de vehículos son llegadas de Poisson. Se pide:

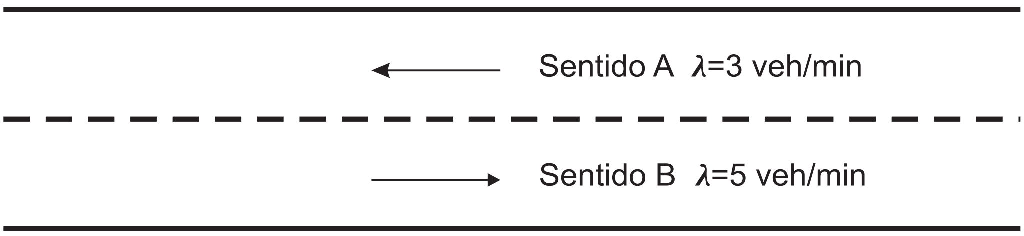
a) Calcular la probabilidad de que en 30 segundos pasen más de 5 vehículos en total.

b) Si en 20 segundos pasa un sólo vehículo, ¿cuál es la probabilidad que circule por el sentido A?

c) Debido a la falta de paso señalizado, un peatón decide cruzar la carretera en un lugar de muy difícil visibilidad. El tiempo que tarda en cruzar la carretera es de 12 segundos. Calcular la probabilidad de que el peatón no sea atropellado. Téngase en cuenta que la carretera consta de dos sentidos de circulación y supóngase que el tiempo usado por el peatón para cruzar cada sentido es el mismo.

SOLUCIÓN

(a)



Sea X el número de vehículos que circulan por el sentido A e Y el que circula por el sentido B. Sabemos que $X \equiv P(\nu_x = \lambda_x T)$ y que $Y \equiv P(\nu_y = \lambda_y T)$. Introduciendo los datos obtenemos que $X \equiv P(1.5)$ e $Y \equiv P(2.5)$. Suponiendo que las llegadas en ambos sentidos son independientes y ya que la distribución de Poisson es regenerativa respecto a la suma, podemos obtener la variable aleatoria Z, que representa el número total de vehículos que circulan por la carretera como

$$Z = X + Y = P(\nu_x + \nu_y) = P(4)$$

Una vez que conocemos la distribución de Z podemos calcular la probabilidad solicitada como

$$P[Z > 5] = 1 - P[Z \leq 5] = 0.21487.$$

(b) Dado que $T = 20$ segundos, las distribuciones de las variables aleatorias X, Y y Z son: $X \equiv P(1)$, $Y \equiv P(\frac{5}{3})$ y $Z \equiv P(\frac{8}{3})$. La probabilidad solicitada es

$$P[X = 1|Z = 1] = \frac{P[Z = 1|X = 1]P[X = 1]}{P[Z = 1|X = 1]P[X = 1] + P[Z = 1|Y = 1]P[Y = 1]},$$

donde

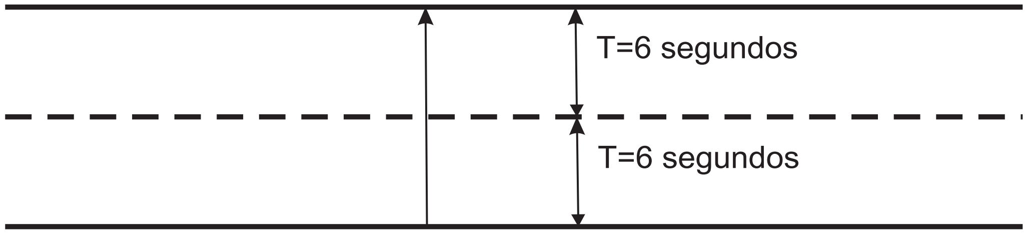
$$\begin{aligned}
&P[Z = 1|X = 1] = P[Y = 0] = 0.1889\\
&P[Z = 1|Y = 1] = P[X = 0] = 0.3679\\
&P[X = 1] = 0.3679\\
&P[Z = 1] = P[Z = 1|X = 1]P[X = 1] + P[Z = 1|Y = 1]P[Y = 1] =\\
&= P[Y = 0]P[X = 1] + P[X = 0]P[Y = 1] = 0.1853.
\end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad solicitada es

$$P[X = 1|Z = 1] = \frac{0.1889 \cdot 0.3679}{0.1853} = 0.3750.$$

Además, por el teorema de la probabilidad total se puede comprobar que la distribución de Poisson es regenerativa respecto a la suma. Dado que conocemos la distribución de la variable aleatoria Z, podemos calcular $P[Z = 1] = \frac{e^{-8/3}(8/3)^1}{1!} = 0.1853$. Se ha obtenido la misma probabilidad, tal y como se esperaba.

(c) El peatón tarda el mismo tiempo en recorrer cada uno de los carriles, es decir, $T = 6$ segundos. Por tanto $X \equiv P(\frac{3}{10})$, $Y \equiv P(\frac{1}{2})$.



Por tanto la probabilidad solicitada es $p = P[X = 0 \cap Y = 0]$, dado que se asumen independientes,

$$p = P[X = 0]P[Y = 0] = \frac{e^{-\frac{3}{10}}(\frac{3}{10})^0}{0!}\frac{e^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^0}{0!} = 0.4493.$$

El peatón tiene una probabilidad de aproximadamente un 55 % de sufrir un atropello.

4.– En una determinada estación meteorológica, la lluvia total anual puede considerarse normalmente distribuida con media $m = 1016$ milímetros y desviación tipica $\sigma = 101.6$ milímetros. ¿Cuál es la probabilidad de que, empezando a contar este año, pasen más de 10 años antes de que en un año se recojan más de 1270 milímetros de lluvia?

——————————SOLUCIÓN——————————

Sea X la lluvia anual en milímetros. Sabemos que $X \equiv N(1016, \sigma = 101.6)$. La probabilidad de que en un año tipo se recojan más de 1270 mm (suceso que llamaremos "éxito") es

$$p = P[X > 1270] = 1 - F_X(1270) = 1 - F_U\Big(\frac{1270 - 1016}{101.6}\Big) = 1 - F_U(2.5) = 0.0062$$

Sea "K" el año en que tiene lugar el primer éxito. Si consideramos cada año independiente del anterior, K está geométricamente distribuida con parámetro $p = 0.0062$. Nos piden $P[K > 10]$. Luego

$$P[K > 10] = 1 - P[K \leq 10] = 1 - F_K(10)$$

Pero $F_K(k) = 1 - (1-p)^k$. Y por tanto

$$F_K(10) = 1 - (1-p)^{10} = 1 - (0.9938)^{10} = 1 - 0.9397$$

Y el resultado pedido es, pues

$$P[K > 10] = 0.9397$$

5.– En una planta de elaboración de mezclas bituminosas en caliente tienen dos calentadores de mezcla diferentes, A y B. La regulación de la temperatura de salida es fundamental en el proceso de elaboración. Se sabe que la temperatura de salida de cada máquina es una variable aleatoria, X e Y, que siguen una distribución normal con $m_x = 180°C$, $\sigma_x = 5°C$, y $m_y = 180°C$, $\sigma_y = 4°C$. El proceso de calidad establecido por la planta consiste en tomar la temperatura de salida para cada partida, si la temperatura es inferior a $175°C$ se desecha. La máquina A produce exactamente $280m^3$ y la máquina B $200m^3$ al día. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que una partida escogida al azar de entre todas las producidas en un día sea defectuosa?

(b) Si en un día se han elaborado 24 partidas de $20m^3$, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos dos partidas defectuosas?

(c) De las 24 partidas elaboradas, ¿cuál es la probabilidad de que elegida una partida al azar, haya sido fabricada con el calentador B?

——————————SOLUCIÓN——————————

En el enunciado se definen X e Y como las temperaturas de las partidas de mezcla bituminosa elaboradas con los calentadores A y B. Sus distribuciones son: $X \equiv N(m_X = 180, \sigma_X^2 = 5^2)$ e $Y \equiv N(m_Y = 180, \sigma_Y^2 = 4^2)$.

a) Sea T la temperatura de una partida al azar, nos piden calcular $P[T \leq 175]$. Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P[T \leq 175] = P[T \leq 175|A]P[A] + P[T \leq 175|B]P[B]$$

Los datos proporcionados por el enunciado son:

$$P[A] = \frac{280}{480} = 0.5833, \quad P[B] = \frac{200}{480} = 0.4167$$

A partir de las distribución, conocida, podemos calcular:

$$P[T \leq 175|A] = P[X \leq 175] = P\left[U \leq \frac{175-180}{5}\right] = P\left[U \leq -1\right] = 0.1587$$

$$P[T \leq 175|B] = P[Y \leq 175] = P\left[U \leq \frac{175-180}{4}\right] = P\left[U \leq -1.25\right] = 0.10565$$

Por tanto, la probabilidad pedida es

$$P[T \leq 175] = P[T \leq 175|A]P[A] + P[T \leq 175|B]P[B] \approx 0.1587 \cdot 0.5833 + 0.10565 \cdot 0.4167 = 0.1366$$

b) Sea R el número de partidas defectuosas presentes en la producción de un día.

$$P[R \geq 2] = 1 - P[R < 2] = 1 - P[R = 1] - P[R = 0]$$

La variable aleatoria R tiene una distribución binomial, $R \equiv B(24, 0.1366)$.

$$P[R \geq 2] = 1 - \binom{24}{1} 0.1366^1 (1-0.1366)^{23} - \binom{24}{0} 0.1366^0 (1-0.1366)^{24} =$$

$$= 1 - 0.1118 - 0.02945 = 0.859$$

c)Se pide $P[B] = 0.1366$