CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 8 **SOLUCIONES** (**Curso 2024–2025**)

1.– La concesionaria del mantenimiento y conservación del puente de la Constitución de 1812 de Cádiz decide diseñar un plan de cambio de bombillas en el sistema de iluminación de las vías, que consta de 200 farolas. La concesionaria te encarga que hagas el siguiente análisis:

Si se decide no sustituir ninguna bombilla al fallar:

(a) Calcular la distribución de la vida de todo el sistema, es decir, el tiempo hasta que la última bombilla deja de funcionar.

(b) En el contrato con la administración se establece, que por motivos de seguridad, debe de haber al menos un 80 % de ellas operativas. ¿Cuál es la probabilidad de que a los 2 años se haya incumplido el contrato con la administración?

Suponer que cada farola tiene una bombilla y que la duración de la bombilla está exponencialmente distribuida con media de 8 años.

———————SOLUCIÓN———————

a) Sea X la vida de una farola, $X \equiv EX(\lambda)$, con $\lambda = \frac{1}{8}$ años^{-1}.

Se define la variable aleatoria T como la vida total del sistema

Dado que el sistema falla cuando todas las bombillas se funden, $T = max\{X_1, X_2, ..., X_{200}\}$. Por tanto la distribución de T será:

$$P[T \leq t] = P[(X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t) \cap ... \cap (X_{200} \leq t)] = (F_X(t))^{200}$$

Por tanto,

$$F_T(t) = \left(1 - e^{\frac{-t}{8}}\right)^{200}$$

b)

Llamemos éxito a que el suceso "una farola dura menos de 2 años". La probabilidad de este suceso es

$$P[X \leq 2] = 1 - e^{\frac{-2}{8}} = 0.221$$

Si tenemos 200 farolas y suponemos que todas ellas son independientes, el número N de farolas que durarán menos de 2 años será $N \equiv B(200, 0.221)$. Se incumplirá el contrato si a los dos años han fallado más del 20 % de las farolas.

$$P[N > 40] = 1 - P[N \leq 40]$$

Como $np = 44.23 > 5$ y $n(1-p) = 155.8 > 5$ podemos aproximar, a efectos de cálculo, esta binomial por una normal, es decir, $N \equiv B(200, 0.221) \approx N(np, np(1-p)) = N(44.23, 34.43)$. Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[N > 40] = 1 - P[N \leq 40] = 1 - F_U\left(\frac{40.5 - 44.23}{\sqrt{34.43}}\right) = 1 - F_U(-0.636) = 0.738$$

Si se decide no cambiar ninguna bombilla en los dos primeros años, hay un 73.8 % de incumplir el contrato de mantenimiento.

2.– En el proyecto de una cierta carretera participan tres empresas constructoras: A, B y C. Tras analizar los resultados de las inspecciones de calidad del firme en obras anteriores de estas empresas, se ha observado que la empresa A comete, de media, un defecto en el firme por cada 10.000 metros de carretera construidos; la empresa B comete un defecto cada 9.000 metros, y la empresa C cada 7.500 metros. Dado que las tres empresas manejan volúmenes de construcción semejantes se supone que la probabilidad elegir cualquiera de las 3 empresas es la misma. Además, se supone que el número de defectos en el firme de cada empresa sigue una distribución de Poisson.

a) Si se inspecciona aleatoriamente un tramo de 100.000 metros de carretera ejecutado por estas empresas. ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan encontrado exactamente 12 defectos en el firme?

b) En un tramo de 100.000 metros de carretera, construido íntegramente por una de estas empresas, se han encontrado 12 defectos en el firme. Calcular la probabilidad de que lo haya ejecutado la empresa A.

c) Si se inspeccionan aleatoriamente 50 tramos de 1.000 metros de carretera cada uno, construidos por la empresa B, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 1 de los tramos inspeccionados tengan algún defecto en el firme?

——————————SOLUCIÓN——————————

Llamemos E_A, E_B y E_C al número de defectos en el firme que cometen las empresas constructoras A, B y C, respectivamente. E_A, E_B y E_C son variables aleatorias con distribución de Poisson y parámetros $\lambda_A = 1/10,000$ defectos/metro, $\lambda_B = 1/9,000$ defectos/metro y $\lambda_C = 1/7,500$ defectos/metro.

a) Llamemos E al suceso "hay 12 defectos en 100,000 metros". Entonces, por el teorema de la probabilidad total

$$P[E] = P[E|M_A]P[M_A] + P[E|M_B]P[M_B] + P[E|M_C]P[M_C]$$

siendo M_A el suceso ”los 100,000 metros los ha ejecutado la empresa A”, etc. y teniendo en cuenta que los tres sucesos M_A, M_B y M_C son incompatibles y que $M_A \cup M_B \cup M_C = \Omega$. Dado que inicialmente no tenemos información sobre quién ha ejecutado los 100,000 metros, asignaremos $P[M_A] = P[M_B] = P[M_C] = 1/3$.

Como se han ejecutado 100,000 metros las medias de las correspondientes distribuciones de Poisson serán $\nu_A = 100,000/10,000 = 10$, $\nu_B = 100,000/9,000 = 100/9$ y $\nu_C = 100,000/7,500 = 100/7.5$. Por tanto

$P[E|M_A] = P[E_A = 12] = \frac{e^{-10}10^{12}}{12!} = 0.09478$

$P[E|M_B] = P[E_B = 12] = \frac{e^{-100/9}(100/9)^{12}}{12!} = 0.11047$

$P[E|M_A] = P[E_A = 12] = \frac{e^{-100/7.5}(100/7.5)^{12}}{12!} = 0.10674$

Y sustituyendo valores en la expresión anterior de la probabilidad total

$$P[E] = \frac{0.09478 + 0.11047 + 0.10674}{3} = 0.104$$

b) Aplicando el teorema de Bayes

$$P[M_A|E] = \frac{P[E|M_A]P[M_A]}{P[E|M_A]P[M_A] + P[E|M_B]P[M_B] + P[E|M_C]P[M_C]}$$

Y sustituyendo valores en la expresión anterior

$$P[M_A|E] = \frac{0.09478}{0.09478 + 0.11047 + 0.10674} = 0.30379$$

c) Denominamos X al número de tramos de carretera de 1,000 m construido por la empresa B que tiene algún defecto en el firme. Si suponemos que cada uno de los tramos es independiente de los otros, se puede considerar que X tiene una distribución binomial $X \equiv B(n, p)$. Además, se dice que un tramo tiene algún defecto si $E_B \geq 1$, por tanto la probabilidad de éxito p resulta

$$p = 1 - P[E_B = 0] = 1 - \frac{e^{-1/9}(1/9)^0}{0!} = 0.10516$$

El suceso cuya probabilidad queremos averiguar es $[X \geq 2]$. Tenemos así

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X = 1] - P[X = 0] = 1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} - \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 =$$

$$= 1 - 0.32920 - 0.38686 = 0.28394$$

3.– En el análisis de una intersección entre una vía principal y una secundaria con menor tráfico se establece la prioridad de los conductores que circulen por la vía principal y la colocación de unas señales de STOP en la secundaria. Se establece que el tráfico de la vía principal sigue un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 30$ vehículos por minuto. Adicionalmente se ha establecido que un conductor necesita en la vía secundaria al menos 6 segundos para realizar el STOP, comprobar que no viene ningún vehículo y cruzar la vía. Si nos centramos en un conductor que circula por la vía secundaria y se aproxima a la intersección, se pide:

a) La probabilidad de que, después de pasar 10 vehículos por la vía principal, el conductor siga en el STOP.

b) La probabilidad de que el conductor haya tenido dos oportunidades de cruzar la vía principal al pasar 10 vehículos.

c) La probabilidad de que el conductor haya tenido a lo sumo dos oportunidades de de cruzar la vía principal al pasar 10 vehículos.

d) La probabilidad de que hayan pasado 10 vehículos hasta que el conductor haya conseguido cruzar la vía principal.

SOLUCIÓN

a) Llamemos T al tiempo entre dos llegadas de Poisson. Sabemos que $\lambda = 30$ vehículos por minuto o lo que es lo mismo, $\lambda = 0.5$ vehículos por segundo (para utilizar unidades equivalentes). Entonces $T \equiv EX(0.5)$. La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas sea superior a 6 s (el coche que espera puede pasar) es

$$p = P[T > 6] = 1 - P[T \leq 6] = 1 - F_T(6) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t} = e^{-0.5\times 6} = e^{-3}$$

Si llamamos a esta probabilidad la de éxito (el coche puede pasar) y X el primer intervalo en el que puede pasar, evidentemente $X \equiv G(e^{-3})$. Tenemos que calcular $P[X > 10]$.

$$P[X > 10] = 1 - P[X \leq 10] = 1 - F_X(10) = 1 - [1 - (1-p)^{10}] = (1-p)^{10} = (1-e^{-3})^{10} = 0.6$$

b) Si han pasado 10 vehículos, el conductor ha tenido 10 posibilidades (experimentos de Bernouilli) de cruzar. Por lo tanto, si llamamos Y al número de éxitos, obviamente $Y = B(10, e^{-3})$. Es decir

$$P[X = 2] = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^{10-2} = 45 \times e^{-6}(1-e^{-3})^8 = 0.0741$$

c)

$$P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 0.6 + \binom{10}{1} p(1-p)^{10-1} + 0.0741 = 0.9885$$

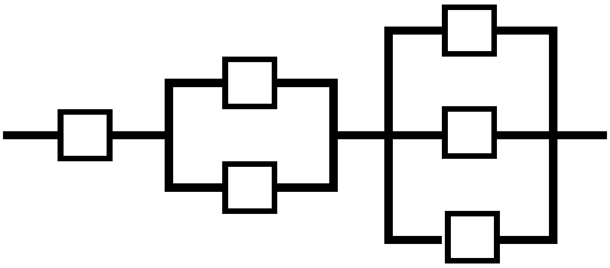
donde el primero y el tercer sumando se han calculado en los apartados a) y b), respectivamente.

d)

$$P[X = 11] = p(1-p)^{10} = e^{-3}(1-e^{-3})^{10} = 0.0299 \approx 0.03$$

ya que recordemos que X es una variable geométrica.

4.– El sistema de la figura es tal que cada uno de sus componentes tiene una vida aleatoria exponencialmente distribuida con parámetro λ, y es independiente de todos los demás. Calcular la distribución y la esperanza matemática de la vida del sistema.



———————SOLUCIÓN———————

Sea X la vida de un componente. Sabemos que $X \equiv EX(\lambda)$. Sea Y_1, Y_2 e Y_3 la vida de los sistemas de un componente, dos componentes y tres componentes, respectivamente. Obviamente $Y_1 = X$. Por otra parte

$$Y_2 = max\{X_a, X_b\}$$

donde a y b son los dos componentes del sistema. Luego

$$F_{Y_2} = [F_X(y)]^2 = [1 - e^{-\lambda y}]^2$$

Igualmente

$$Y_3 = max\{X_a, X_b, X_c\} \quad \Rightarrow \quad F_{Y_3} = [F_X(y)]^3 = [1 - e^{-\lambda y}]^3$$

Si Z es el tiempo de vida del sistema total

$$F_Z(z) = min\{Y_1, Y_2, Y_3\} = 1 - [1 - F_{Y_1}(z)][1 - F_{Y_2}(z)][1 - F_{Y_3}(z)], \quad z \in [0, \infty)$$

Operando resulta

$$F_Z(z) = 1 + [e^{-6\lambda z} - 5e^{-5\lambda z} + 9e^{-4\lambda z} - 6e^{-3\lambda z}], \quad z \in [0, \infty)$$

Derivando,

$$f_Z(z) = -6e^{-6\lambda z} + 25e^{-5\lambda z} - 36e^{-4\lambda z} + 18e^{-3\lambda z}, \quad z \in [0, \infty)$$

Multiplicando por z e integrando entre 0 y ∞ resulta, teniendo en cuenta que $\int_0^\infty hxe^{-hx}dx = \frac{1}{h}$

$$E[z] = \frac{7}{12\lambda}$$

———

5.– La Unión Europea ha fijado como objetivo ser climáticamente neutra en 2050, lo que significa conseguir cero emisiones netas de gases de efecto invernadero mediante la reducción de emisiones y la inversión en tecnologías verdes. La preocupación por garantizar y aumentar una producción energética que no contribuya al cambio climático y sea sostenible en el uso de los recursos naturales y en el tiempo está presente a nivel global, formando parte de los Objetivos de Desarrollo Sostenible. Así, el Objetivo 7 ("Energía asequible y limpia") y el Objetivo 13 ("Adoptar medidas urgentes para combatir el cambio climático y sus efectos") hacen especial hincapié en esta preocupación. Para lograrlo, se están desarrollando nuevas fuentes de generación de energía renovable, como por ejemplo, la captación de energía de las corrientes marinas y las mareas mediante turbinas. En la siguiente imagen se muestra un prototipo de esta tipología de turbinas.

Para analizar la rentabilidad del parque es esencial conocer la vida útil del mismo. Como primera aproximación, la vida útil de cada turbina se puede modelar como una variable exponencial con media 25 años. Si el parque está formado por 20 turbinas y la vida de cada turbina se considera independiente, se pide:

a) Determinar la distribución de la vida de la primera turbina que falla.

b) Determinar la distribución de la vida de la segunda turbina que falla.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que a los 25 años hayan fallado exactamente 10 turbinas?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen más de 5 turbinas en 20 años?

————————SOLUCIÓN————————

Sea X_i al tiempo de vida de la turbina i.

a) Llamaremos V al tiempo de vida de la primera turbina que falla. Por tanto V será el mínimo de $X_1, X_2, ..., X_{20}$ ($V = min\{X_i\}$.) Razonando como siempre

$$P[V > v] = P\Big[(X_1 > v) \cap (X_2 > v) \cap ... \cap (X_i > v) \cap ... \cap (X_{20} > v)\Big]$$

Considerando independencias e incompatibilidades

$$P[V > v] = 1 - F_V(v) = (e^{-\lambda v})^{20}$$

luego

$$F_V(v) = 1 - (e^{-\lambda v})^{20}, \quad v \geq 0$$

b)Llamaremos W al tiempo de vida de la segunda turbina que falla. Por tanto W será el segundo mínimo de $X_1, X_2, ..., X_{25}$

$$P[W > w] = P\Big[\big\{(X_1 > w) \cap (X_2 > w) \cap ... \cap (X_i > w) \cap ... \cap (X_{20} > w)\big\} \cup$$
$$\cup \big\{(X_1 \leq w) \cap (X_2 > w) \cap ... \cap (X_i > w) \cap ... \cap (X_{20} > w)\big\} \cup$$

$$\cup\Big\{(X_1 > w) \cap (X_2 \leq w) \cap ... \cap (X_i > w) \cap ... \cap (X_{20} > w)\Big\} \cup ...$$

$$... \cup \Big\{(X_1 > w) \cap (X_2 > w) \cap ... \cap (X_i > w) \cap ... \cap (X_{20} \leq w)\Big\}\Big]$$

$$F_W(w) = 1 - (e^{-\lambda w})^{20} - 20(e^{-\lambda w})^{19}(1 - e^{-\lambda w}), \quad w \geq 0$$

c) Sea N el número de turbinas que fallan en 25 años. Parece obvio que será una distribución binomial, donde la probabilidad de éxito es que una turbina falle antes de los 25 años $N \equiv B(20, p)$. Esta probabilidad p la podemos calcular de la siguiente manera:

$$p = F_X(25) = 1 - e^{-\lambda 25} = 1 - e^{-1} = 0.6321$$

La probabilidad pedida será:

$$P[N = 10] = \binom{10}{20}(1 - 0.6321)^{18} 0.6321^2 = 0.0875$$

d) En este apartado $N \equiv B(20, p)$, donde p

$$p = F_X(20) = 1 - e^{-\lambda 20} = 1 - e^{-1} = 0.5507$$

$$P[N > 5] = 1 - P[N \leq 5] = 1 - P[N = 5] - P[N = 4] - P[N = 3] - P[N = 2] - P[N = 1] - P[N = 0] =$$

$$= 1 - 0.0048 - 0.0012 - 0.00024 - 0.00003 - 0.000003 - 10^{-7} = 0.9937$$

Una probabilidad muy elevada, con la que podemos asegurar que en 25 años van a fallar más de 5 turbinas.