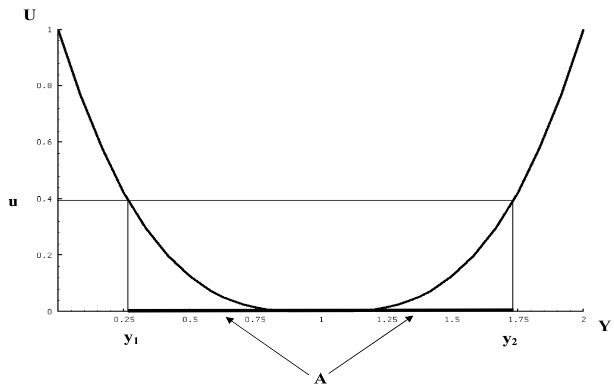
CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 4 **SOLUCIONES** (**Curso 2024–2025**)

1.– Sea Y la variable aleatoria resultante de sumar dos variables uniformemente distribuidas entre 0 y 1. Sea $U = \left|(Y-1)^3\right|$. Calcúlese la distribución de U.

SOLUCIÓN

Nos piden determinar la función de densidad de $U = \left|(Y-1)^3\right|$. Esta función es como muestra la figura. Utilizaremos, pues, funciones de distribución acumulada.



Según lo que indica la figura

$$P[U \le u] = P[Y \in A] = P[y_1 \le y \le y_2] = F_Y(y_2) - F_Y(y_1)$$

Pero obviamente $y_1 = 1 - u^{1/3}$ e $y_2 = 1 + u^{1/3}$, y hay que tener en cuenta que $R_U = [0,1]$. Como es conocido,la función de distribución acumulada de Y es

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{2} & 0 \le y < 1 \\ 1 - \dfrac{(y-2)^2}{2} & 1 \le y < 2 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$F_U(u) = 1 - \frac{(1+u^{1/3}-2)^2}{2} - \frac{(1-u^{1/3})^2}{2} = 1 - (u^{1/3}-1)^2$$

Obsérvese que esta función cumple los requisitos de una función de distribución acumulada. La función de densidad de U es, por tanto,

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{2}{3}\Big(u^{-2/3} - u^{-1/3}\Big), \quad 0 \le u \le 1$$

y se comprueba inmediatamente que es una función de densidad (aunque es más sencillo comprobar que la función de distribución acumulada cumple las condiciones necesarias).

2.– Sabiendo que la distancia X alcanzada por un proyectil disparado por un cañón en el vacío, con velocidad inicial constante e independiente del ángulo de disparo θ, puede escribirse como

$$X = a\ sen(2\theta) \qquad a = cte.,$$

calcúlese exactamente la distribución de X si se sitúa al azar el ángulo de disparo entre la horizontal y la vertical.

SOLUCIÓN

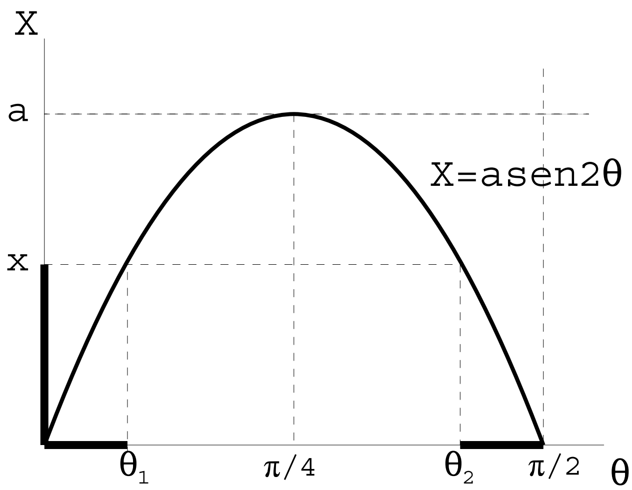
Según el enunciado, Θ sigue una distribución uniforme entre 0 y $\pi/2$, es decir

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} 2/\pi & \text{si } \theta \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por lo tanto

$$F_\Theta(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \leq 0 \\ 2\theta/\pi & \text{si } \theta \in [0, \pi/2] \\ 1 & \text{si } \theta \geq \pi/2 \end{cases}$$

A la hora de obtener la distribución de X a partir de la de Θ hemos de tener en cuenta que la relación entre X y Θ no es monótona, como muestra la gráfica



Es claro que $R_X = [0, a]$. Para cada x en este intervalo (ver gráfica),

$$\begin{aligned} P[X \leq x] &= P[\text{asen}2\theta \leq x] = P[\text{sen}2\theta \leq \frac{x}{a}] \\ &= P\Big[\Big\{2\theta \leq \text{arc sen}\frac{x}{a}\Big\} \cup \Big\{2\theta \geq \pi - \text{arc sen}\frac{x}{a}\Big\}\Big] \end{aligned}$$

(como es habitual definimos la función arc sen de forma que su imagen sea $[-\pi/2, \pi/2]$: dado un valor s entre -1 y 1, los dos ángulos en la primera vuelta de circunferencia que tienen seno igual a s son arc sen s y $\pi-$arc sen s), es decir,

$$\begin{aligned} P[X \le x] &= P\left[\theta \le \theta_1 = \frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{x}{a}\right] + P\left[\theta \ge \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{x}{a}\right] \\ &= F_\Theta\left(\frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{x}{a}\right) + 1 - F_\Theta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{x}{a}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{x}{a} + 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{x}{a}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\text{arc sen}\frac{x}{a}, \qquad x \in [0, a] \end{aligned}$$

De aquí

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{2}{\pi}\text{arc sen}\frac{x}{a} & \text{si } 0 \le x \le a \\ 1 & \text{si } a \le x \end{cases}$$

y por lo tanto

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} & \text{si } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3.– Te han invitado a jugar al siguiente juego. Se lanzan una única vez dos dados y ganas 54 € si la suma de los dos dados es 2, 3, 11 o 12, y pierdes 60 € si sale 7.

a) Calcular la función de probabilidad y la función de distribución acumulada de la variable aleatoria ”dinero ganado en el juego”.

b) ¿Conviene jugar a este juego?

SOLUCIÓN

La probabilidad de obtener un 2, 3, 11 o 12 tirando dos dados puede calcularse como:

Casos posibles: 36

Casos favorables: $\{1,1\},\{1,2\},\{2,1\},\{5,6\},\{6,5\},\{6,6\}$. Es decir, 6

Luego la probabilidad de ganar es $1/6$.

La probabilidad de obtener un 7 viene determinada por los siguientes caso favorables (también 6): $\{1,6\},\{6,1\},\{2,5\},\{5,2\},\{3,4\},\{4,3\}$, luego la probabilidad también es $1/6$. Es, por lo tanto, evidente, que la probabilidad de sacar cualquier otra suma es $4/6$. Por consiguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria $X \equiv$ ”dinero ganado en el juego” es:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/6 & x = -60 \\ 4/6 & x = 0 \\ 1/6 & x = 54 \end{cases}$$

La función de distribución acumulada es igualmente inmediata y vale

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -60 \\ 1/6 & -60 \le x < 0 \\ 5/6 & 0 \le x < 54 \\ 1 & 54 \le x \end{cases}$$

Es inmediato que no se debería jugar a este juego ya que en cada tirada hay la misma probabilidad de ganar y perder y la cantidad perdida (60 €) es mayor que la cantidad ganada (54 €).

4.– Una persona sale en tren de la ciudad A hacia la ciudad B a las 18 h. El tiempo de recorrido entre A y B puede considerarse uniformemente distribuido entre 35 y 75 min. De B salen tres trenes hacia una tercera ciudad C, a las 19 h., a las 19:10 h. y a las 19:15 h. Calcular la distribución del tiempo de espera de dicha persona en la estación de la ciudad B. Se supondrá nulo el tiempo de transbordo.

SOLUCIÓN

La hora de llegada del tren a la estación B puede descomponerse, dependiendo del tren que se coja, en los periodos (18:35,19;00), (19:00,19:10) y (19:10,19:15). Llamenos a cada uno de estos periodos U, V y W, repectivamente. Como el tiempo de recorrido entre A y B es uniforme con rango $R = [35, 75]$ (en minutos), entonces

$$P[U] = \frac{25}{40}, \quad P[V] = \frac{10}{40}, \quad P[W] = \frac{5}{40}$$

En cada periodo el tiempo de espera estará uniformemente distribuido con rangos

$$R_{T_U} = [0, 25], \quad R_{T_V} = [0, 10], \quad R_{T_W} = [0, 5]$$

y consecuentemente

$$f_{T_U} = \frac{1}{25}, \quad f_{T_V} = \frac{1}{10}, \quad f_{T_W} = \frac{1}{5}$$

$$F_{T_U} = \frac{t}{25}, \quad F_{T_V} = \frac{t}{10}, \quad F_{T_W} = \frac{t}{5}$$

El rango total del tiempo de espera es, obviamente, $R_T = [0, 25]$

Vamos a calcular la función de distribución acumulada de T aplicando el teorema de probabilidad total.

a) Si $0 \leq T \leq 5$

$$P[0 \leq T \leq 5] = P[0 \leq T \leq 5|T \in U]P[U] + P[0 \leq T \leq 5|T \in V]P[V] +$$

$$+P[0 \leq T \leq 5|T \in W]P[W] = \frac{1}{5} \times \frac{25}{40} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{40} + 1 \times \frac{5}{40} = \frac{15}{40}$$

b) Si $5 < T \leq 10$

$$P[5 < T \leq 10] = P[5 < T \leq 10|T \in U]P[U] + P[5 < T \leq 10|T \in V]P[V] =$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{25}{40} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{40} = \frac{10}{40}$$

c) Si $10 < T \leq 25$

$$P[10 < T \leq 25] = P[10 < T \leq 25|T \in U]P[U] = \frac{3}{5} \times \frac{25}{40} = \frac{15}{40}$$

5.– Sea X una variable aleatoria definida en el $R_X = [-1, 1]$ y $f_X(x) = \frac{1+x}{2}$. Se pide:

a) Calcular la distribución de la variable $Y = (X - \frac{1}{2})^2$

b) Calcular la distribución de $Z = W - X$, donde W está uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 4]$ y es independiente de X.

———————————SOLUCIÓN———————————

a) La función de distribución acumulada de X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{1+x}{2}\, dx = \frac{(1+x)^2}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Al representar $Y = (X - \frac{1}{2})^2$ vemos que el rango de la variable Y es $R_Y = [0, \frac{9}{4}]$ y que la relación entre las variables X e Y no es monótona.

Para calcular la función de distribución acumulada $F_Y(y) = P[Y \leq y]$ tenemos que distinguir dos casos, $0 \leq y \leq 1/4$ y $1/4 \leq y \leq 9/4$. Teniendo en cuenta

$$y = (x - 1/2)^2 \Rightarrow x = 1/2 \pm \sqrt{y},$$

Para $y \in [0, 1/4]$ se calcula:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[1/2 - \sqrt{y} \leq X \leq 1/2 + \sqrt{y}] = F_X(1/2 + \sqrt{y}) - F_X(1/2 - \sqrt{y}) =$$
$$= \frac{(1 + 1/2 + \sqrt{y})^2}{4} - \frac{(1 + 1/2 - \sqrt{y})^2}{4} = \frac{3\sqrt{y}}{2}$$

mientras que para $y \in [1/4, 9/4]$ la relación es monótona

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X > 1/2 - \sqrt{y}] = 1 - F_X(1/2 - \sqrt{y}) =$$
$$= 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{y} + 1\right)^2 = \frac{1}{16}\left(-4y + 12\sqrt{y} + 7\right)$$

La función de distribución acumulada de Y es

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \dfrac{3\sqrt{y}}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 1/4 \\ \dfrac{1}{16}\left(-4y + 12\sqrt{y} + 7\right) & \text{si } 1/4 \leq y \leq 9/4 \\ 1 & \text{si } y > 9/4. \end{cases}$$

b) Se busca calcular la distribución de $Z = W - X$. Obviamente $R_Z = [-1, 5]$. Fijemos $X = x$. Entonces $Z = W - x$. Por ser una relación monótona podemos escribir

$$f_{Z|X}(z, x) = \left|\frac{dw}{dz}\right| f_{W|X}(w, x) = f_{W|X}(z + x, x)$$

y

$$f_{Z,X}(z, x) = f_{Z|X}(z, x) f_X(x) = f_{W|X}(z + x, x) f_X(x) = f_W(z + x) f_X(x)$$

en donde hemos tenido en cuenta la independencia de las variables W y X. Ahora, integramos para hallar la distrución marginal de Z

$$f_Z(z) = \int_{R_X} f_{Z,X}(z, x)\mathrm{d}x = \int_{R_X} f_W(z + x) f_X(x)\mathrm{d}x$$

Para que la función integrando sea diferente de cero ha de verificarse, simultáneamente,

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq w \leq 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq (z+x) \leq 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1; \\ -z \leq x \leq 4-z; \end{cases}$$

Es decir, la integral anterior se escribe:

Para $z \in [-1,1]$; $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-z}^{1} \frac{1}{4}\,\frac{x+1}{2}\,dx = \frac{1}{16}(-z^2+2z+3)$.

Para $z \in [1,3]$; $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\,\frac{x+1}{2}\,dx = \frac{1}{4}$

Para $z \in [3,5]$; $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-1}^{4-z} \frac{1}{4}\,\frac{x+1}{2}\,dx = \frac{1}{16}(z-5)^2$

Y es inmediato comprobar que esta función es una función de densidad adecuada.