Cálculo de probabilidades y estadística **Examen Final Mayo**

EJERCICIO 2 (SOLUCIONES) **5 de junio de 2025**

1.– Con el fin de evitar problemas de tráfico en una determinada carretera nacional que atraviesa un pequeño pueblo se ha proyectado una vía de circunvalación (ver en la figura la circunvalación una vez realizada). Si consideramos uno de los sentidos del tráfico, se asume que todos los vehículos que no tienen destino en el pueblo toman la circunvalación. El número de vehículos , X, que tomarán diariamente la circunvalación en ese sentido del tráfico se supone exponencialmente distribuido con parámetro λ_1. Adicionalmente, del pueblo salen en ese sentido Y vehículos diarios, pudiendo considerarse que esta variabla aleatoria es también exponencial con parámetro λ_2.

En el estudio de tráfico pertinente se ha definido la variable U como el tanto por uno de vehículos que tomarán la circunvalación sobre el total de vehículos que pasan por la carretera una vez que la circunvalación converja con la carretera nacional (en el sentido considerado).

Se pide:

a) Calcular la distribución del tráfico diario Z en ese sentido de circulación una vez que la circunvalación converja con la carretera nacional.

b) Calcular la distribución de la variable U.

c) ¿Pueden ser en algún caso U y Z independientes?

SOLUCIÓN

a) Nos están pidiendo la distribución de Z. Considerando la hipótesis de independencia entre X e Y podemos calcular la distribución de Z como:

$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(y) dx = \lambda_1\lambda_2 \int_0^z e^{x(\lambda_2-\lambda_1)} e^{-z\lambda_2} dx = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} e^{-z\lambda_2}\left[e^{-z(\lambda_2-\lambda_1)} - 1\right] =$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left[e^{-z\lambda_1} - e^{-z\lambda_2}\right], \quad z \geq 0$$

b) Nos están pidiendo la distribución del cociente $U = X/Z$. Como siempre, fijamos una de las dos variables aleatorias, en este caso la Z.

$$f_{U|Z}(u,z) = \left|\frac{dx}{du}\right| f_{X|Z}(x,z)$$

donde $\left|\frac{dx}{du}\right| = z$ y por lo tanto,

$$f_{U|Z}(u,z) = z f_{X|Z}(x,z)$$

$$f_{U,Z}(u,z) = f_{U|Z}(u,z) f_Z(z) = z f_{X|Z}(x,z) f_Z(z) = z f_{X,Z}(x,z)$$

luego necesitamos conocer la distribución conjunta de X y Z.

$$f_{X,Z}(x,z) = f_{Z,X}(z,x) = f_{Z|X}(z,x) f_X(x)$$

Por lo tanto,

$$f_{U,Z}(u,z) = z f_{X,Z}(x,z) = z f_{Z|X}(z,x) f_X(x) = z f_Y(z-x) f_X(x) = z f_Y(z-zu) f_X(zu)$$

La marginal de U será

$$f_U(u) = \int_0^\infty f_{U,Z}(u,z) dz = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\left[\lambda_2 + (\lambda_1-\lambda_2)u\right]^2}, \quad 0 \leq u \leq 1$$

y es inmediato comprobar que esta función es una función de densidad adecuada.

c) Como se ha visto en el apartado anterior,

$$= z f_Y(z-zu) f_X(zu) = z\lambda_2 e^{\lambda_2(zu-z)} \lambda_1 e^{-\lambda_1 zu} = z\lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)zu - \lambda_2 z}$$

y es evidente que esta función no puede descomponerse como $f_{U,Z}(u,z) = f_U(u) f_Z(z)$, por lo que las variables no son nunca independientes para valores cualesquiera de λ_2 y $\lambda 1$.

Sin embargo, para el caso particular $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ las funciones marginales son

$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(y) dx = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

$$f_U(u) = 1$$

y la conjunta

$$f_{U,Z}(u,z) = z f_Y(z-zu) f_X(zu) = z\lambda e^{\lambda(zu-z)} \lambda e^{-\lambda zu} = \lambda^2 z e^{-\lambda z} = f_U(u) f_Z(z)$$

Luego en este caso particular, cuando los dos parámetros son iguales, las variables U y Z son independientes.

2.– La variables aleatorias X e Y tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = kx(x-y), \quad 0 < x < 2, \quad -x < y < x.$$

a) Determínese k para que dicha función esté bien definida.

b) Determínese la función de distribución acumulada conjunta.

c) Calcúlese las distribuciones marginales, tanto las funciones de densidad como las de distribución acumulada, de X y de Y.

——————————SOLUCIÓN——————————

a) Para que la función sea una función de densidad conjunta adecuada ha de verificarse

$$\int_{R_{XY}} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$$

En nuestro caso

$$\int_{R_{XY}} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^2 \left[\int_{-x}^{x} kx(x-y)dy\right]dx = \int_0^2 -kx\frac{(x-y)^2}{2}\Bigg]_{-x}^{x} dx =$$

$$= \int_0^2 2kx^3dx = k\frac{x^4}{2}\Bigg]_0^2 = 8k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{8}$$

b) La función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-x}^{x} \frac{1}{8}x(x-y)dy = -\frac{1}{8}x\frac{(x-y)^2}{2}\Bigg]_{-x}^{x} = \frac{x^3}{4}$$

Obviamente esta es una función correcta, ya que

$$\int_0^2 \frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4}{16}\Bigg]_0^2 = 1$$

La función de densidad marginal de Y, teniendo en cuenta que el rango conjunto es puede obtenerse de la siguiente forma:

Para $-2 \leq y \leq 0$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{XY}(x,y)dx = \int_{-y}^{2} \frac{1}{8}x(x-y)dx = \int_{-y}^{2} \frac{1}{8}(x^2 - xy)dx = \frac{1}{8}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2})\Big]_{-y}^{2} = \frac{5y^3 - 12y + 16}{48}$$

Para $0 \leq y \leq 2$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{XY}(x,y)dx = \int_{y}^{2} \frac{1}{8}x(x-y)dx = \int_{y}^{2} \frac{1}{8}(x^2 - xy)dx = \frac{1}{8}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2})\Big]_{y}^{2} = \frac{y^3 - 12y + 16}{48}$$

Obviamente, también se trata de una función correcta ya que

$$\int_{-2}^{0} \frac{5y^3 - 12y + 16}{48} dy + \int_{0}^{2} \frac{y^3 - 12y + 16}{48} dy = 0.75 + 0.25 = 1$$

3.– Una central hidroeléctrica tiene algunos sistemas duplicados con el fin de mejorar la seguridad del servicio. Un sistema hidráulico S, representado en la figura, falla (S = 0) si las dos ramas en paralelo que lo componen R_1, R_2 fallan simultáneamente $(R_1 = 0, R_2 = 0)$.

La rama R_1 tiene dos elementos A_1 y B_1 en serie y funciona si ambos elementos no fallan $(A_1 = 1, B_1 = 1)$. A_1 y B_1 funcionan independientemente. La rama R_2 tiene un solo elemento A_2, es decir $R_2 = 0$ si $A_2 = 0$. Se sabe que A_2 y B_1 funcionan independientemente y se conocen las siguientes probabilidades:

$$p_0 = P[A_1 = 0 | A_2 = 0] = P[A_2 = 0 | A_1 = 0]$$
$$p_1 = P[A_1 = 0 | A_2 = 1] = P[A_2 = 0 | A_1 = 1]$$
$$p_b = P[B_1 = 0]$$

Se pide

a) Hallar las probabilidades $P[A_1 = 0]$ y $P[A_2 = 0]$.

b) Hallar las probabilidades de ambas ramas $P[R_1 = 0]$ y $P[R_2 = 0]$.

c) Hallar la probabilidad de fallo del sistema $P[S = 0]$ y compararla con $P[R_1 = 0]$.

SOLUCIÓN

a) Se trata de determinar las probabilidades marginales de variables aleatorias a partir de sus condicionales. Este problema equivale al de determinar una distribución conjunta a partir de las condicionales. El teorema de Bayes establece que

$$P[A_2 = 0 | A_1 = 0] = \frac{P[A_1 = 0 | A_2 = 0] P[A_2 = 0]}{P[A_1 = 0 | A_2 = 0] P[A_2 = 0] + P[A_1 = 0 | A_2 = 1] P[A_2 = 1]},$$

donde debe tenerse en cuenta que los sucesos $A_2 = 0$ y $A_2 = 1$ son los posibles valores de la variable de Bernoulli A_2. Si en la expresión anterior se sustituyen los valores conocidos de las probabilidades condicionales, se obtiene

$$p_0 = \frac{p_0 P[A_2 = 0]}{p_0 P[A_2 = 0] + p1(1 - P[A_2 = 0])}$$

de donde se puede despejar la probabilidad marginal $P[A_2 = 0]$ obteniéndose

$$P[A_2 = 0] = \frac{p_1}{1 + p_1 - p_0}.$$

Es fácil comprobar que el cociente resultante está comprendido entre 0 y 1 cualesquiera que sean las probabilidades p_0 y p_1. Para hallar $P[A_1 = 0]$ basta observar la simetría del problema respecto a A_1 y A_2 para deducir que $P[A_1 = 0] = P[A_2 = 0]$. Lo mismo se obtendría escribiendo el teorema de Bayes para la condicional $P[A_1 = 0|A_2 = 0]$.

b) La rama R_2 del sistema es idéntica a A_2 por lo que $P[R_2 = 0] = P[A_2 = 0]$ ya conocida. La rama R_1 está constituida por dos dispositivos en serie, A_1 y B_1, cuyo funcionamiento es independiente. La forma más directa de obtener el resultado (no la única) es

$$P[R_1 = 0] = 1 - P[R_1 = 1] = 1 - P[A_1 = 1 \cap B_1 = 1] = 1 - P[A_1 = 1]P[B_1 = 1]$$

de donde

$$P[R_1 = 0] = \frac{p_1 + p_b(1 - p_0)}{1 - p_0 + p_1}.$$

c) El fallo del sistema, S, se obtiene cuando ambas ramas fallan. Teniendo en cuenta que el funcionamiento de ambas ramas no es independiente debido a la dependencia entre A_1 y A_2, la correspondiente probabilidad puede calcularse de la siguiente forma

$$P[S = 0] = P[R_1 = 0 \cap R_2 = 0] = P[R_1 = 0|A_2 = 0]P[A_2 = 0]$$

La probabilidad $P[R_1 = 0|A_2 = 0]$ se desarrolla, de acuerdo con el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta la independencia de A_1 y A_2 respecto a B_1, en la forma siguiente

$$P[R_1 = 0|A_2 = 0] = 1 - P[R_1 = 1|A_2 = 0] = 1 - P[A_1 = 1 \cap B_1 = 1|A_2 = 0] = 1 - (1 - p_0)(1 - p_b).$$

Sustituyendo este valor se llega a

$$P[S = 0] = \frac{p_0 p_1(1 - p_b) + p_1 p_b}{1 - p_0 + p_1}$$

La comparación entre la probabilidad $P[S = 0]$ y $P[R_1 = 0]$ tiene como objetivo resaltar que se reduce la probabilidad de fallo del sistema por el hecho de añadir la rama R_2. Para ello, basta tener en cuenta que el fallo del sistema equivale a $(R_1 = 0) \cap (R_2 = 0)$ y que, si sólo se considera la primera rama, el fallo es $R_1 = 0$. Éste último suceso incluye al anterior (estrictamente a menos que el fallo de R_1 implique el de R_2). Por ello se puede afirmar que

$$P[S = 0] \leq P[R_1 = 0]$$

motivo por el cual la presencia de la rama R_2 mejora la seguridad global del sistema.