

① Carácter de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a (Ln)^\alpha}$; $a, \alpha \in \mathbb{R}$

• Criterio logarítmico:

$$\frac{L(V_n)}{Ln} = \frac{L[n^a (Ln)^\alpha]}{Ln} = \frac{L(n^a) + L[(Ln)^\alpha]}{Ln} = \frac{a Ln}{Ln} + \frac{\alpha L(Ln)}{Ln}$$

$$\text{Entonces: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(V_n)}{Ln} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \alpha \underbrace{\frac{L(Ln)}{Ln}}_{\rightarrow 0 (*)} \right) = a \begin{cases} > 1 & C \\ \leq 1 & D \\ = 1 & ? \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} (*) \text{ por órdenes} \\ \text{de infinitud} \end{array} \right]$$

• Estudio el caso dudoso ($a=1$) $\sum \frac{1}{n(Ln)^\alpha}$. Distinguimos 3 posibilidades

$$\alpha < 0 \Rightarrow \sum \frac{1}{n(Ln)^{-|\alpha|}} = \sum \frac{(Ln)^{|\alpha|}}{n} \text{ mayorante de } \sum \frac{1}{n}, \text{ divergente}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ armónica, divergente}$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ es M. decreciente, pues: } \frac{1}{(n+1)[L(n+1)]^\alpha} < \frac{1}{n[(Ln)^\alpha]}$$

Puedo aplicar "Condensación": $\sum a_n$ tiene igual carácter que $\sum 2^n a_{2^n}$

$$\sum \frac{2^n}{2^n [L(2^n)]^\alpha} = \sum \frac{1}{(nL2)^\alpha} = \frac{1}{(L2)^\alpha} \sum \frac{1}{n^\alpha}, \text{ serie de Riemann.}$$

$$\text{Según el valor de } \alpha: \begin{cases} \alpha > 1 & C \\ \alpha \leq 1 & D. \end{cases}$$

• En resumen:

$a > 1$	C
$a = 1, \alpha > 1$	C
$a = 1, \alpha \leq 1$	D
$a < 1$	D

② Carácter y suma: $\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} - \frac{1}{12^2} + \frac{1}{5^2} - \dots$

• Comenzamos en clase de prácticas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad S_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}; \quad S_{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$

• Observando la serie $\sum |a_n|$, vemos que contiene todos los elementos de $\sum \frac{1}{n^2}$ (C), reagrupados: un impar (+), tres pares (-)...

Entonces $\sum a_n$ es absolutamente convergente, luego es inecondicionalmente convergente. Para sumarla puedo agrupar los t^{os} positivos y los negativos y sumarlos por separado.

$$\begin{aligned} \bullet \underline{\underline{\sum a_n}} &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} - \frac{1}{12^2} + \frac{1}{5^2} \dots = \\ &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = S_I - S_P = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi^2}{12}} \end{aligned}$$

③ Carácter y suma: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{27} + \dots$

• Vemos que los t^n aparecen en grupos de 3: un t^n de la armónica impar (+), uno par (-) y el inverso de una potencia de 3 (+). Tomando una S.P. de $3n$ t^n , contendrá n t^n impares de la armónica, n pares y n inversos de potencias de 3.

$$\begin{aligned} \bullet S_{3n} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3^0} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3^1} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots = \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \right) + \underbrace{\left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)}_{\text{S.G. } r=1/3} \end{aligned}$$

• Recordemos: $I_n = L2 + \frac{1}{2}(L_n + \gamma) + \epsilon_1$

$$P_n = \frac{1}{2}(L_n + \gamma) + \epsilon_2$$

$$S_n^3 = \frac{1}{3^0} \frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3} = \frac{1 - (1/3)^n}{2/3} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

• Simplifiquemos y tomemos límites:

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \left(I_n - 1 + \frac{1}{2n+1} \right) - \left(P_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2} \right) + S_n^3 = \\ &= \left[L2 + \frac{1}{2}(L_n + \gamma) + \epsilon_1 - 1 + \frac{1}{2n+1} \right] - \left[\frac{1}{2}(L_n + \gamma) + \epsilon_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2} \right] + S_n^3 = \\ &= L2 + \epsilon_1 - 1 + \frac{1}{2n+1} - \epsilon_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = L2 + 0 - 1 + 0 - 0 + \frac{1}{2} - 0 + \frac{3}{2} \cdot 1 = 1 + L2$$

$$\boxed{S = 1 + L2}$$

NOTA: Hemos sumado directamente la serie, a partir de la suma Parcial

Para analizar la convergencia, consideramos $\sum |a_n|$. Entonces

$$S'_{3n} = \left(I_n - 1 + \frac{1}{2n+1} \right) + \left(P_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2} \right) + S_n^3 = \underbrace{(H_n)}_{\text{S.P. de la armónica, divergente}} - \frac{3}{2} + \epsilon_n + S_n^3$$

La S.P. de $|a_n|$ contiene a H_n , S.P. de la armónica, divergente.

Entonces $\sum a_n$ es absolutamente divergente y la convergencia es condicional.