1.– Estudia la convergencia uniforme y puntual de las siguientes sucesiones funcionales:

$$\textbf{a)}\ f_n(x) = \frac{1-nx^2}{1+nx^2}\,; \qquad \textbf{b)}\ f_n(x) = \frac{(1+nx)^2}{1+n^2x^2}$$

$$\textbf{c)}\ f_n(x) = n^2(1-x)x^n\,; \qquad \textbf{d)}\ f_n(x) = x\,e^{-nx},\ x \geq 0$$

2.– Estudia la convergencia uniforme y puntual de las siguientes series funcionales:

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n\sqrt{n}}\,; \qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}\, e^{-2n^2x^2}; \qquad \textbf{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x^2)^n}{2^n}$$

3.– Se considera la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\,; \qquad a_n = \frac{n+1}{n!}$$

Se pide:

a) Calcular su radio y campo de convergencia.

b) Calcular su función suma.

4.– Calcula el campo de convergencia y la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(2n+1)x^{2n}$.

5.– Se considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$. Se pide:

a) Calcular su radio y campo de convergencia.

b) Calcular su función suma.

c) Calcular la suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$.

6.– Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{n \cdot 4^n}$, se pide:

a) Calcular su radio y campo de convergencia.

b) Calcular su función suma.

c) Calcular la suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

7.– Dada la función $f(x) = \operatorname{argth} x$, se pide:

a) Obtener su desarrollo de Taylor en torno a $x = 0$, a partir del desarrollo de $\ln(1+t)$.

b) Calcular el radio de convergencia del desarrollo en serie de $f(x)$ mediante el teorema de Cauchy-Hadamard. Definir el conjunto de valores de x para los que la serie converge.

8.– Sea $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{2x}{x^2+1}$. Se pide:

a) Obtener el desarrollo de Taylor.

b) Calcular el radio y campo de convergencia.

c) A la vista del resultado, encontrar otra función que tenga el mismo desarrollo.

9.– Se pide:

a) Hallar el desarrollo en serie de Mc Laurin de la función:

$$f(x) = \ln(1+bx)\,; \quad b > 0$$

y determinar su radio de convergencia.

b) Aplicar el resultado anterior para calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); \qquad \lim_{x\to\infty} \ln\left(2 + 3e^x\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

10.– Calcula los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la función $y = x^x$ en torno al punto $x = 1$.

11.– Halla el valor de a para que el siguiente infinitésimo (cuando $x \to 0$) tenga el mayor orden posible y obtén su desarrollo limitado de grado 6.

$$f(x) = e^{-x^2} - \cos ax$$

12.– Calcula los siguientes límites empleando desarrollos limitados de Taylor:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x\cosh x - x\cos x}{\tan x - \operatorname{sen} x} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \ln(1+x)}{e^{x^2} - \cos\sqrt{2}x}$$

13.– Sea la ecuación $F(x,y) = \cos(\ln xy) - \dfrac{1}{xy} = 0$, que define a y como función implícita (diferenciable) de x, en un entorno de $x = 1$. Utilizando el desarrollo limitado de $y(x)$, se pide calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x) - 1}{1 + y'(x)}$$
