

1.– Efectúa las siguientes operaciones entre complejos:

a) $\frac{4+i}{3-2i}$; b) $(1-i)(2-6i)(1+i)$; c) $(1+2i)^2 \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1-i}{2+i} \right)$;
d) $(-1+i)^3$; e) $(1-\sqrt{3}i)^4$; f) $(5-12i)^2$; g) $\frac{1-i^3+i^{33}-i^{333}}{1+i+i^4-i^{44}}$

2.– Expresa en forma exponencial los siguientes números complejos:

a) $-2i$; b) $1+i$; c) $\sqrt{3}+i$; d) $1-i\sqrt{3}$; e) $-5-12i$

3.– Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $2e^{\pi i}$; b) $3e^{\frac{\pi}{3}i}$; c) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$; d) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; e) $\sqrt{5}$; f) $e^{\frac{\pi}{6}i}$

4.– Calcula las siguientes raíces complejas:

a) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$; b) $\sqrt[3]{-8}$; c) $\sqrt[3]{1-i}$; d) $\sqrt[4]{\frac{i}{2}}$; e) $\sqrt[5]{-1+i\sqrt{3}}$

5.– Escribe la expresión general de las raíces n -ésimas siguientes:

a) $1^{1/n}$; b) $(-1)^{1/n}$; c) $i^{1/n}$; d) $(-i)^{1/n}$

6.– Resuelve las siguientes ecuaciones en el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos:

a) $z^2 + 4z + 29 = 0$ b) $z^4 + z^2 + 1 = 0$
c) $z^4 - 1 = 0$ d) $z^3 + 10z^2 + 37z = 0$

7.– Encuentra las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

a) $x_1 = 3 + i\sqrt{5}$, $x_2 = 3 - i\sqrt{5}$ b) $x_1 = 2 + i\sqrt{3}$, $x_2 = 2 - i\sqrt{3}$
c) $x_1 = -3 + i$, $x_2 = -3 - i$ d) $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 + 2i$

8.– Sea el complejo $z = \frac{3-2ai}{4-3i}$. Se pide determinar el valor de a para que se verifique:

- a) Que z sea imaginario puro.
- b) Que z sea real.
- c) Que el afijo de z esté sobre la bisectriz del primer cuadrante.

El ejercicio se resolverá primero para $a \in \mathbb{R}$ y luego para $a \in \mathbb{C}$, comprobando que las soluciones para a real son un caso particular de las correspondientes para a complejo.

9.- Halla los números complejos z tales que su séptima potencia sea igual a su conjugado. Representalos gráficamente.

10.- Sea un cuadrado situado por encima del eje real, cuyos vértices consecutivos son los afijos de z_1, z_2, z_3 y z_4 . Si $z_1 = 0$ y $z_2 = 3 + 2i$, obtén los otros dos vértices. Repite el ejercicio si el afijo de z_1 se traslada al punto $P(1, 1)$ y el de z_2 no se mueve.

11.- Los afijos de z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 y z_6 son los vértices consecutivos de un hexágono regular. Sabiendo que $z_1 = 0$ y $z_4 = 6i$, halla z_2, z_3, z_5 y z_6 .

12.- Demuestra que, si los afijos de z_1, z_2, z_3 forman un triángulo equilátero, se cumple:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$$

13.- Encuentra el lugar geométrico de los afijos de los complejos z tales que:

$$z + \bar{z} < |z|$$

14.- Encuentra el lugar geométrico de los afijos de los complejos z tales que el cociente de sus distancias a los puntos $z = 1$ y $z = -1$ vale 2.
