

1.– Estudia la convergencia uniforme y puntual de las siguientes sucesiones funcionales:

a)  $f_n(x) = \frac{1 - nx^3}{1 + nx^3}, x \in [0, 1]$       b)  $f_n(x) = e^{-n(x-\sqrt{x})^2}, x \in [0, 1]$   
c)  $f_n(x) = \frac{\sqrt{nx}}{1 + n^2x^2}, x \in \mathbb{R}$       d)  $f_n(x) = \frac{x}{e^{2n^2x^2}}, x \in \mathbb{R}$

---

2.– Estudia la convergencia uniforme y puntual de las siguientes series funcionales:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1 + nx^2)}$ ;      b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\cos(nx) - \operatorname{sen}(nx))$ ;      c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n}$

---

3.– Se considera la serie funcional  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$ , definida en  $[1, \infty)$ . Se pide estudiar su convergencia uniforme y obtener su función suma.

---

4.– Calcula el campo de convergencia y la suma de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)(n + 2)x^n$ .

---

5.– Se considera la serie de potencias  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$ . Se pide:

a) Calcular su campo de convergencia.

b) Obtener su función suma  $f(x)$ .

c) A partir de los resultados anteriores, calcular  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)2^{4n-1}}$ .

---

6.– Se considera la serie de potencias  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n-1}}{4n}$ . Se pide:

a) Calcular su campo de convergencia.

b) Obtener su función suma  $f(x)$ .

c) A partir de los resultados anteriores, sumar la serie numérica:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n)}$ .

---

7.– Dada la función  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x^2}{1-x^2} \right)$ ,  $|x| < 1$

a) Obtén su desarrollo de Taylor en torno a  $x = 0$  a partir del desarrollo de  $\ln(1+t)$ .

b) Calcula el radio de convergencia del desarrollo en serie de  $f(x)$  mediante el criterio de Cauchy-Hadamard. Define el conjunto de valores de  $x$  para los que la serie converge.

---

8.– Estudia la convergencia de la serie numérica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2n)}{2^n}$  y, en su caso, calcula su suma.

---

9.– Dada la función  $f(x) = \frac{1+x^3}{(1+x)^3}$ , se pide calcular su desarrollo en serie de MacLaurin, a partir del desarrollo de  $\frac{1}{1+x}$ , determinando su radio y campo de convergencia.

---

10.– Calcula el desarrollo de Mac Laurin de orden 6 de la función  $f(x) = \sin^2 x$  de tres maneras:

- a) Aplicando la fórmula de Taylor a  $f(x)$ .
  - b) Utilizando el desarrollo del  $\sin x$ .
  - c) Utilizando el desarrollo de la función  $\cos 2x$ .
- 

11.– Halla el valor de  $a$  para que el siguiente infinitésimo (cuando  $x \rightarrow 0$ ) tenga el mayor orden posible y obtén su desarrollo limitado de orden 5.

$$f(x) = \frac{x + ax^3}{1 + x^2} - \sin x$$

---

12.– Calcula los siguientes límites empleando desarrollos limitados de Taylor:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cosh x + 3 \sinh x - 4x}{x^3}$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

---

13.– Sea la ecuación  $F(x, y) = y + \ln y - \sin x - 1 = 0$ , que define a  $y$  como función implícita –diferenciable– de  $x$ , en un entorno de  $x = 0$ . Utilizando el desarrollo limitado de  $y(x)$ , se pide calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-2y')}{x-2(y-1)}$$

---