1.– Halla los extremos relativos de las funciones:

a) $z = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$

b) $z = \operatorname{sen}(x+y) - \cos(x-y), \qquad x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$

2.– Determina el punto en que la derivada de la función $f(x, y) = x^3 + 3y^3 - x^2 + y^2$ según la dirección del vector (1,2), alcanza un extremo. Averigua de qué tipo de extremo se trata, así como el valor de la derivada direccional en ese punto.

3.– Sea la ecuación:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \qquad 0 < x < 25$$

Sin despejar y, demuestra que $\dfrac{dy}{dx}$ tiene signo constante.

4.– Las siguientes ecuaciones definen a y como función implícita de x en un entorno de los puntos indicados. Escribe las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las curvas $y = \psi(x)$ en dichos puntos:

a) $2 - y = y^x$ $\qquad A\,(0, 1)$

b) $x + 4y^2 = 1$ $\qquad B\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

c) $\ln(2x - y^2) + 3x^2 y = 3$ $\qquad C\,(1, 1)$

5.– Suponiendo que la función $F(x, y, z) = 0$ define tres funciones implícitas $x(y, z)$, $y(x, z)$, y $z(x, y)$, todas ellas diferenciables, demuestra que se verifica:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

6.– La ecuación $F(x - az,\ y - bz) = 0$ determina a z como función implícita $z = \psi(x, y)$, diferenciable. Demuestra que z satisface la ecuación:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

7.– Calcula los extremos relativos de la función $z = \psi(x, y)$, definida implícitamente por la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$$

8.– Comprueba si la función $z = f(x, y)$ definida a partir de la ecuación

$$xyz + \operatorname{sen}(z - 3) - x^2y^2 - x - y = 0$$

tiene un extremo en el punto $P(1, 1)$, indicando el tipo de extremo de que se trata.

9.– Calcula el plano tangente y la recta normal a las siguientes superficies en el punto indicado:

$$\textbf{a)}\ x^2 + xy^2 + z = 26 \quad A(2,-3,4); \qquad \textbf{b)}\ z = \operatorname{sen} xy \quad B(1,\pi,0)$$

10.– Calcula los extremos de las siguientes funciones, en las condiciones indicadas:

a) $h(x,y) = x^2 + y^2$	sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$
b) $f(x,y,z) = x + 2y + 4z$	sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 7$
c) $z(x,y) = xy$	sobre la elipse $2x^2 + 9y^2 = 18$

11.– Halla las dimensiones de la caja paralepipédica de volumen máximo y superficie fija $12\,\mathrm{m}^2$.

12.– Determina el plano que pasa por el punto $(1,2,3)$, y forma con los planos coordenados un tetraedro de volumen mínimo.

13.– Descompón el número 15 en tres sumandos positivos tales que su producto sea máximo.

14.– Determina las dimensiones del triángulo de perímetro dado y área máxima. Utiliza la fórmula:

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (p = \text{semiperímetro})$$

15.– Halla los puntos de la superficie de la esfera, de centro el punto $(1,1,1)$ y radio $2\sqrt{3}$, tales que la suma de sus coordenadas es máxima.

16.– Calcula las distancias máxima y mínima del origen a la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

17.– Inscribe en una esfera un cilindro de

a) Volumen máximo.

b) Área lateral máxima.
