

1.– Determina los dominios de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = \sqrt{x - (y - 1)^2 - 1} & \text{b) } g(u, v) = \frac{u + v}{\sqrt{2u - v}} \\ \text{c) } r(t, s) = \frac{\ln(t^2 + s^4)}{\operatorname{sen}(ts)} & \text{d) } h(x, y) = \ln(xy + 1) \end{array}$$

2.– Efectúa la composición de los siguientes pares de funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{f}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t) & \text{con } \mathbf{g}(x, y) = (y^2 + x^2, y^2 - x^2) \\ \text{b) } \mathbf{f}(x, y, z) = (x + z, y - x) & \text{con } h(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) \\ \text{c) } \mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t) & \text{con } g(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2 \end{array}$$

3.– Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy & \text{b) } g(u, v) = e^{\frac{\operatorname{sen} v}{u}} \\ \text{c) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{d) } g(u, v) = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} u + 1}{\sqrt{v}}\right) \\ \text{e) } f(x, y) = x^{y^2} & \text{f) } g(u, v) = \operatorname{sen} \frac{u^2}{v} \\ \text{g) } f(x, y) = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} & \text{h) } g(u, v) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{uv} \\ \text{i) } f(x, y) = \ln \cos(x + 2y) & \text{j) } g(u, v) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{sen} u \cos v) \end{array}$$

4.– Sean las funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} & \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 + 1) + y^2(y^2 + 1)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \\ \text{c) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} & \text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^4 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^4 = 0 \end{cases} \end{array}$$

Estudia su continuidad, existencia de derivadas direccionales y parciales y diferenciabilidad.

5.– Calcula las derivadas direccionales de las siguientes funciones, en el punto P y según la dirección del vector \mathbf{v} .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} & P(1, 1) & \mathbf{v} = (2, 1) \\ \text{b) } f(x, y) = xy^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y} & P(2, 1) & \mathbf{v} = (1, 1) \\ \text{c) } f(x, y, z) = z - e^x \operatorname{sen} y & P(\ln 3, \pi/2, 1) & \mathbf{v} = (1, 1, 2) \\ \text{d) } f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xyz^2 & P(1, 1, 0) & \mathbf{v} = (1, -1, 2) \end{array}$$

6.- Sean los puntos $P(1, -1), Q(2, -1), R(1, 0), S(0, 2)$. La función real de variable vectorial $f(x, y)$, diferenciable en P , tiene en este punto unas derivadas direccionales de valor 3 según la dirección del vector \overline{PQ} y de valor 1 según la dirección del vector \overline{PR} . Calcula la derivada direccional de f en P según la dirección del vector \overline{PS} .

7.- La temperatura en cada punto de una placa metálica viene dada por la función:

$$t(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x$$

a) ¿En qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura en el punto $(0,0)$ y cual es el valor de este aumento?

b) ¿En qué dirección disminuye más rápidamente la temperatura en el punto $(0,0)$?

8.- Calcula du en las funciones siguientes:

$$\text{a) } u(x, y) = \ln xy + \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \qquad \text{b) } u(x, y, z) = z^{y^x}$$

9.- Calcula d^2u en las funciones siguientes, particularizando su valor en los puntos indicados:

$$\text{a) } u(x, y) = e^{ax} \cos y, \quad P\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{b) } u(x, y) = y^2 \sqrt{x^2 + 1}, \quad P(\sqrt{3}, -1)$$

10.- Calcula las derivadas siguientes, particularizando para los valores indicados de las variables. En el caso c) se supone derivable la función f :

a) $\frac{du}{dt}$ siendo $u = 3x + y$; $x = t^2 + 1$; $y = \sin t$. Particulariza en $t = 0$.

b) $\frac{dz}{dt}$ siendo $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = e^t$; $y = \ln t$. Particulariza en $t = 1$.

c) $\frac{du}{dt}$ siendo $u = x^2 + y^2 + z^2$; $x = f(t)$; $y = t f(t)$; $z = f(t^2)$. Particulariza $f(v) = \sqrt{v}$.

d) $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial t}$ siendo $z = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$; $x = r \cos t$; $y = r \sin t$. Particulariza en $r = t = 1$.

e) $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial s}$ siendo $v = xyz + \cos z$; $x = t + s$; $y = t - s$; $z = t^2 - s^2$. Particulariza en $t = 1, s = 0$.

11.- Estudia la diferenciabilidad y escribe la matriz jacobiana de las siguientes funciones vectoriales de variable vectorial en todo punto y, en particular, en los que se indican.

$$\text{a) } \mathbf{f}(x, y) = (x^2, y^2, e^{xy}) \qquad \text{en } (1, 1)$$

$$\text{b) } \mathbf{g}(x, y) = (xy, \sin x, x^2 y) \qquad \text{en } (\pi, \pi/2)$$

$$\text{c) } \mathbf{r}(u, v) = (u + v, u^2 v^3) \qquad \text{en } (4, 1)$$

12.- Los lados de un rectángulo, a y b , miden respectivamente 10 y 24 *cm*. ¿Cómo variará la diagonal del rectángulo si a se alarga 4 *mm* y b se acorta 1 *mm*? Calcula el valor aproximado de esta variación y compáralo con el valor exacto.

13.- Demuestra que el error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores. Aplícalo al cálculo del área del rectángulo del ejercicio anterior.

14.– Sea un prisma recto de base cuadrada de lado l y altura h . Sus dimensiones son variables, de modo que l aumenta con una velocidad de 5 m/s y h disminuye a razón de 4 m/s , ¿A qué velocidad varían el volumen y la superficie del prisma en el instante en que $l = 20 \text{ m}$ y $h = 30 \text{ m}$?

15.– Demuestra que, si $z = f(x + ay)$, siendo f diferenciable y $a \in \mathbb{R}$, se verifica:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$$

16.– Sea la función $z = yf(x^2 - y^2)$, con f diferenciable. Demuestra que se verifica:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

17.– Sea $z = z(u, v)$ con $u = x + y$, $v = x - y$. Prueba que se verifica:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

18.– Sea $z = f(x + ay) - g(x - ay)$, donde f y g son funciones derivables de una variable y a es una constante. Demuestra que se verifica:

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 (f''(x + ay) - g''(x - ay))$$

19.– Aproxima las siguientes funciones en un entorno del punto P mediante un polinomio de segundo grado utilizando la fórmula de Taylor.

a)	$h(x, y, z) = e^{x+y+z}$	$P(0, 0, 0)$
b)	$r(u, v) = \cos u \cos v$	$P(0, 0)$
c)	$f(x, y) = \frac{1}{1 + xy}$	$P(1, 0)$
