Álgebra Lineal II

TEMA II- Espacios vectoriales euclídeos.

Capítulo 2. Ortogonalidad.

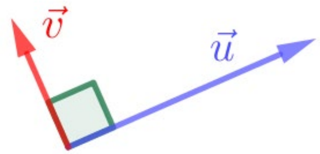
Vectores, sistemas, bases ortogonales y ortonormales. Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Luis Fuentes García (2022).

Vectores ortogonales.

Trabajaremos en un Espacio vectorial euclídeo = Espacio vectorial U + producto escalar

Definición. Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ se dicen **ortogonales** o **perpendiculares** y se denota por $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{0}$.



$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Propiedades:

1) $\vec{u} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Prueba: $\vec{u} \perp \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{u}\| = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

2) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^0$

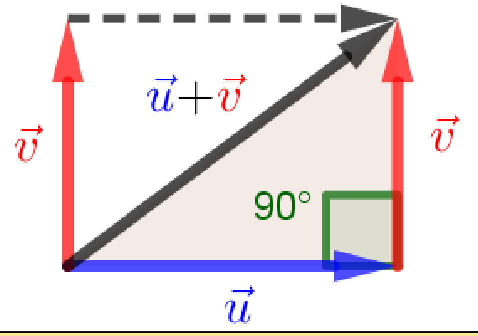
Prueba: $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^0$

3) Teorema de Pitágoras. Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ entonces $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Prueba: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$

simetría $\rightarrow$ $= \|\vec{u}\|^2 + 2\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{\mathbf{0}} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

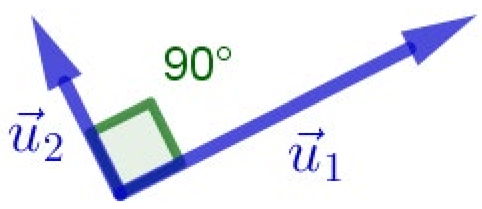


Sistemas ortogonales y ortonormales.

Definición. $\{\vec{u}_1\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ se dicen un **sistema ortogonal** si cumple:

$$\vec{u}_i \perp \vec{u}_j \text{ si } i \neq j. \iff \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \text{ si } i \neq j.$$

(**cada vector es ortogonal a los demás**)



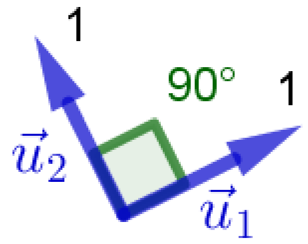
Definición. $\{\vec{u}_1\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ se dicen un **sistema ortonormal** si cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_i \perp \vec{u}_j \text{ si } i \neq j. \iff \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \text{ si } i \neq j. \\ \|\vec{u}_i\| = 1 \iff \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 1 \text{ si } i = j. \end{array}\right\} \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij}$$

(**cada vector es ortogonal a los demás y de NORMA 1**)

Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$



Teorema: Si $\{\vec{u}_1\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ es un **sistema ortogonal** y son vectores **no nulos** entonces son **linealmente independientes**.

Prueba: Hay que probar que: si $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_k\vec{u}_k = \vec{0}$ entonces **TODOS** los $a_i = 0$

Multiplicamos a ambos lados por cada $\vec{u}_i$

$$\Rightarrow (a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_k\vec{u}_k) \cdot \vec{u}_i = \vec{0} \cdot \vec{u}_i$$

$$\Rightarrow a_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_i + a_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_i + \cdots + a_k\vec{u}_k \cdot \vec{u}_i = 0$$

Todos CERO excepto $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i$

$$\Rightarrow a_i\overbrace{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i}^{\neq 0} = 0 \Rightarrow a_i = 0$$

Corolario: Si $\{\vec{u}_1\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ es un **sistema ortonormal** entonces son **linealmente independientes**.

Bases ortogonales y ortonormales (I).

Definición. $B=\{\vec{u}_1\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n\}$ se dice una **BASE ortogonal** si es un **sistema ortogonal** y además es **BASE**:

$$\vec{u}_i \perp \vec{u}_j \text{ si } i\neq j. \iff \vec{u}_i\cdot\vec{u}_j = 0 \text{ si } i\neq j. \iff G_B \text{ es } \textbf{diagonal}$$

(es BASE y cada vector es ortogonal a los demás)

Es lo que para **formas bilineales simétricas**, llamábamos **base de vectores conjugados**.

Definición. $B=\{\vec{u}_1\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n\}$ se dicen una **BASE ortonormal** si es un **sistema ortonormal** y además es **BASE:**

$$\left.\begin{array}{lcl} \vec{u}_i \perp \vec{u}_j \text{ si } i\neq j. & \iff & \vec{u}_i\cdot\vec{u}_j = 0 \text{ si } i\neq j. \\ \|\vec{u}_i\| = 1 & \iff & \vec{u}_i\cdot\vec{u}_j = 1 \text{ si } i = j. \end{array}\right\} \vec{u}_i\cdot\vec{u}_j = \delta_{ij} \iff G_B = Id$$

(es BASE, cada vector es ortogonal a los demás y de NORMA 1)

Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i\neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Ventajas de las bases ortonormales.

Si B es una **base ortonormal**:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)_B G_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Las **fórmulas** para calcular **normas** y **productos coinciden** con las del **producto escalar usual**.

Si B y B' son dos **bases ortonormales**:

$$\underbrace{G_{B'}}_{Id} = M^t_{BB'}\underbrace{G_B}_{Id} M_{BB'} \Rightarrow Id = M^t_{BB'}M_{BB'}$$

$$\boxed{M^{-1}_{BB'} = M^t_{BB'}}$$ **Matriz ortogonal.**

Su **inversa** coincide con su **traspuesta**.

Bases ortogonales y ortonormales (II).

Definición. $B = \{\vec{u}_1 \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ se dicen una **BASE ortonormal** si es un **sistema ortonormal** y además es **BASE:**

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{u}_i \perp \vec{u}_j \text{ si } i \neq j. & \Leftrightarrow & \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \text{ si } i \neq j. \\ \|\vec{u}_i\| = 1 & \Leftrightarrow & \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 1 \text{ si } i = j. \end{array}\right\} \Leftrightarrow G_B = Id$$

Ejemplo. En el R^3 con el producto escalar $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ calcular una **base ortonormal**.

Idea:

B base ortonormal $\Leftrightarrow G_B = Id$

$G_B = M_{CB}^t \, G_C \, M_{CB}$ CONGRUENCIA

Fila Columna

$$G_C \xrightarrow{\text{CONGRUENCIA}} Id = G_B$$

base ortonormal

$$Id \xrightarrow{\text{Op. Columna}} M_{CB}$$

Sus **columnas** son los vectores de la base B en **función de la canónica**

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-1)\ \ \mu_{31}(-1)]{H_{21}(-1)\ H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{32}(-1)]{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_3(1/\sqrt{3})]{H_3(1/\sqrt{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{31}(-1)]{\mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_3(1/\sqrt{3})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = M_{CB}$$

$B = \{(1,0,0), (-1,1,0), (0, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$ **base ortonormal**

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt I.

Dato: $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k\}$ una **base** de un **SUBESPACIO** vectorial U

Objetivo: obtener $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots, \vec{v}_k\}$ una **base ortogonal** del **SUBESPACIO** vectorial U

$\boxed{\vec{v}_1 = \vec{u}_1}$

En cada paso **sumamos** al siguiente vector original una **combinación lineal** de los **nuevos** ya **calculados.**

$\boxed{\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + a_{21}\vec{v}_1}$ **Imponemos ortogonalidad** $\boxed{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 0} \Rightarrow \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_{21} = -\dfrac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}}$

Incógnita.

$\boxed{\vec{v}_3 = \vec{u}_3 + a_{31}\vec{v}_1 + a_{32}\vec{v}_2}$

Incógnitas.

Imponemos ortogonalidad:

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1 + a_{31}\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \cancel{a_{32}\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1} = 0 \qquad \boxed{a_{31} = -\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}}$$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2 + \cancel{a_{31}\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} + a_{32}\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 0 \qquad \boxed{a_{32} = -\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}}$$

En general para hallar el vector número s:

$$\boxed{\vec{v}_s = \vec{u}_s + a_{s1}\vec{v}_1 + a_{s2}\vec{v}_2 + \cdots + a_{ss-1}\vec{v}_{s-1}}$$

Imponemos ortogonalidad: Incógnitas.

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_s \cdot \vec{v}_1 &= 0 \\ \vec{v}_s \cdot \vec{v}_2 &= 0 \\ &\dots \\ \vec{v}_s \cdot \vec{v}_{s-1} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a_{s1} = -\frac{\vec{u}_s \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}} \quad \boxed{a_{s2} = -\frac{\vec{u}_s \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}} \quad \dots \quad \boxed{a_{ss-1} = -\frac{\vec{u}_s \cdot \vec{v}_{s-1}}{\vec{v}_{s-1} \cdot \vec{v}_{s-1}}}$$

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt II.

Dato: $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k\}$ base de un SUBESPACIO U

Objetivo: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots, \vec{v}_k\}$ base ortogonal de U

$$\boxed{\vec{v}_1 = \vec{u}_1}$$

En cada paso **sumamos** al siguiente vector original una **combinación lineal** de los **nuevos** ya **calculados.**

En general para hallar el vector número s:

$$\boxed{\vec{v}_s = \vec{u}_s + a_{s1}\vec{v}_1 + a_{s2}\vec{v}_2 + \cdots + a_{ss-1}\vec{v}_{s-1}}$$

Imponiendo ortogonalidad:

$$\boxed{a_{sm} = -\frac{\vec{u}_s \cdot \vec{v}_m}{\vec{v}_m \cdot \vec{v}_m}}$$

OBSERVACIONES y CONSECUENCIAS:

1) Es un método especialmente **cómodo** para ser **implementado en un ordenador**.

2) Si queremos una **base ORTONORMAL** a los **vectores de la base obtenida** les aplicamos el proceso de **NORMALIZACIÓN**.

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots, \vec{v}_k\} \xrightarrow{\text{NORMALIZACIÓN.}} \left\{\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \dots, \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}\right\}$$

Dividir cada vector por su **norma** para conseguir uno de **módulo 1**.

3) Mientras los **vectores originales** sean **perpendiculares** a los anteriores, **Gram-Schmidt NO los modifica**.

4) **Teorema de la base ortogormal incompleta**. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ es un **sistema ortogonal** de vectores no nulos, entonces puede completarse a una **base ortogonal de todo el espacio** Si $\{\vec{u}_1 \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_{k+1} \dots, \vec{v}_n\}$

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\} \longrightarrow \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1} \dots, \vec{u}_n\} \longrightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1} \dots, \vec{v}_n\} \longrightarrow \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_{k+1} \dots, \vec{v}_n\}$$

Independientes. — **Base de todo el espacio.** — **Base ortogonal** — **Base ortogonal.**

Teorema de Steiniz (Álgebra Lineal I)

Gram-Schmidt

Ejemplo. En R^3 con el producto escalar $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ calcular una **base ortonormal** del **subespacio** $U = L\{(1,0,0),(1,1,1),(2,1,1)\}$

Pasos:
1) **Eliminar** posibles generadores **dependientes**.
2) Aplicar **Gram-Schmidt** para obtener **base ortogonal**.
3) **Normalizar** para obtener **base ortonormal** .

1) **Escalonar:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{31}(-1)]{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{22}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$U = L\{(1,0,0),(0,1,1)\}$

2) **Gram-Schmidt** $U = L\{(1,0,0),(0,1,1)\}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (1,0,0) \\ \vec{v}_2 &= (0,1,1) + a(1,0,0) \end{aligned}\right\}$$ Imponemos ortogonalidad

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 0$$

$$(0,1,1)\cdot(1,0,0) + a(1,0,0)\cdot(1,0,0) = 0$$

$$a = -\frac{(0,1,1)\cdot(1,0,0)}{(1,0,0)\cdot(1,0,0)} = -\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = -2$$

$$\vec{v}_2 = (0,1,1) - 2(1,0,0)$$

$B = \{(1,0,0),(-2,1,1)\}$ base ortogonal

3) **NORMALIZACIÓN.** **Dividimos cada vector por su módulo.**

$$\frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|} = \frac{(1,0,0)}{\sqrt{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}} = \frac{(1,0,0)}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} = (1,0,0)$$

$$\frac{(-2,1,1)}{\|(-2,0,0)\|} = \frac{(-2,1,1)}{\sqrt{(-2,1,1)\cdot(-2,1,1)}} = \frac{(-2,1,1)}{\sqrt{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} = (-2/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7})$$

$$\boxed{B' = \{(1,0,0),(-2/\sqrt{7},1/\sqrt{7},1/\sqrt{7})\} \text{ base ortonormal de } U}$$