

3. Transformaciones ortogonales.

En todo el capítulo trabajaremos sobre un espacio vectorial euclídeo U .

1 Definición.

Definición 1.1 Una transformación ortogonal f de un espacio euclídeo U es un endomorfismo que conserva el producto escalar.

$$f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \text{para cualesquiera } \bar{x}, \bar{y} \in U.$$

Veamos que en realidad es suficiente la condición de conservación del producto escalar, es decir:

Proposición 1.2 Si una aplicación de $f : U \rightarrow U$ conserva el producto escalar entonces es una aplicación lineal.

Prueba: Sean $\bar{x}, \bar{y} \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Queremos ver que:

$$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}).$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} & (f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) - \alpha f(\bar{x}) - \beta f(\bar{y})) \cdot (f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) - \alpha f(\bar{x}) - \beta f(\bar{y})) = \\ & = f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \cdot f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) + \alpha^2 f(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}) + \beta^2 f(\bar{y}) \cdot f(\bar{y}) - \\ & \quad - 2\alpha f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \cdot f(\bar{x}) - 2\beta f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \cdot f(\bar{y}) + 2\alpha\beta f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y}) = \\ & = (\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \cdot (\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) + \alpha^2 \bar{x} \cdot \bar{x} + \beta^2 \bar{y} \cdot \bar{y} - \\ & \quad - 2\alpha(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \cdot \bar{x} - 2\beta(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \cdot \bar{y} + 2\alpha\beta \bar{x} \cdot \bar{y} = \\ & = ((\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) - \alpha\bar{x} - \beta\bar{y}) \cdot ((\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) - \alpha\bar{x} - \beta\bar{y}) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) - \alpha f(\bar{x}) - \beta f(\bar{y}) = 0$. ■

Utilizando esta proposición podemos dar una caracterización de las transformaciones ortogonales:

Teorema 1.3 $f : U \rightarrow U$ es una transformación ortogonal si y sólo si lleva bases ortonormales en bases ortonormales.

Prueba: Si f es una transformación ortogonal, está claro que lleva bases ortonormales en bases ortonormales. Simplemente hay que tener en cuenta que f conserva el producto escalar y que un sistema ortogonal es libre.

Probemos el recíproco. Teniendo en cuenta la proposición anterior, basta suponer que f lleva bases ortonormales en bases ortonormales y comprobar que entonces f conserva el producto escalar.

Sea $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ una base ortonormal de U y $f(B) = \{f(\bar{u}_1), \dots, f(\bar{u}_n)\}$ la base ortonormal imagen. Dados $\bar{x}, \bar{y} \in U$ de coordenadas $(x^i), (y^j)$ respecto a la base B , tenemos:

$$f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y}) = f(x^i \bar{u}_i) \cdot f(y^j \bar{u}_j) = x^i y^j f(\bar{u}_i) \cdot f(\bar{u}_j).$$

Teniendo en cuenta que las bases B y $f(B)$ son ortonormales queda:

$$f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y}) = x^i y^j f(\bar{u}_i) \cdot f(\bar{u}_j) = x^i y^j \delta_{ij} = x^i y^j \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = (x^i \bar{u}_i) \cdot (y^j \bar{u}_j) = \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

■

2 Propiedades.

Sea $f : U \rightarrow U$ una transformación ortogonal. Veamos algunas de las principales propiedades que cumple.

1. *Conserva el producto escalar.*
2. *Transforma bases ortonormales en bases ortonormales.*
3. *Conserva el módulo:*

$$\|f(\bar{x})\|^2 = f(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{x} = \|\bar{x}\|^2.$$

4. *Conserva ángulos:*

$$\cos(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = \frac{f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y})}{\|f(\bar{x})\| \|f(\bar{y})\|} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|} = \cos(\bar{x}, \bar{y}).$$

5. *Es biyectiva.*

Prueba: Por llevar bases ortonormales en bases ortonormales es sobreyectiva. Por la fórmula de las dimensiones es también inyectiva.

También podemos ver directamente que es inyectiva, comprobando que el núcleo es $\{0\}$.

$$f(\bar{x}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} = f(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}.$$

6. *La composición de transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal.*

Prueba: Si f y g son transformaciones ortogonales, se tiene:

$$(g \circ f)(\bar{x}) \cdot (g \circ f)(\bar{y}) = g(f(\bar{x})) \cdot g(f(\bar{y})) = f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

7. *La inversa de una transformación ortogonal es una transformación ortogonal.*

Prueba: Si f es ortogonal, se verifica:

$$f^{-1}(\bar{x}) \cdot f^{-1}(\bar{y}) = f(f^{-1}(\bar{x})) \cdot f(f^{-1}(\bar{y})) = \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

8. *Si f es un endomorfismo y B una base de U se tiene:*

$$f \text{ transformación ortogonal} \iff F_B^t G_B F_B = G_B$$

Prueba: Tenemos:

$$\begin{aligned} f \text{ t. ortogonal} &\iff f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in U \iff \\ &\iff (F_B(x))^t G_B F_B(y) = (x) G_B (y)^t \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in U \iff \\ &\iff (x)^t F_B^t G_B F_B(y) = (x) G_B (y)^t \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in U \iff \\ &\iff F_B^t G_B F_B = G_B. \end{aligned}$$

9. Si f es un endomorfismo y B una base ortonormal de U se tiene:

$$f \text{ transformación ortogonal} \iff F_B^t F_B = Id \iff F_B \text{ es ortogonal}$$

Prueba: Es consecuencia de la propiedad anterior teniendo en cuenta que la matriz de Gram respecto a una base ortonormal es la identidad.

10. Si f es una transformación ortogonal, B una base de U , entonces $|F_B| = \pm 1$.

Prueba: Se tiene:

$$|G_B| = |F_B^t G_B F_B| = |F_B| |G_B| |F_B| \Rightarrow |F_B|^2 = 1 \Rightarrow |F_B| = \pm 1.$$

3 Autovalores y autovectores.

Proposición 3.1 Los autovalores reales de una transformación ortogonal son 1 ó -1.

Prueba: Si $t : U \rightarrow U$ es una transformación ortogonal, λ es un autovalor real y \bar{x} el autovector no nulo asociado se tiene:

$$t(\bar{x}) \cdot t(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{x} \Rightarrow \lambda^2 \bar{x} \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot \bar{x} \Rightarrow \lambda^2 = 1.$$

■

Proposición 3.2 Si $t : U \rightarrow U$ es una transformación ortogonal, los subespacios característicos asociados a autovalores distintos son ortogonales.

Prueba: Los únicos autovalores reales distintos de t son 1 y -1. Sean $\bar{x} \in S_1$, $\bar{y} \in S_{-1}$. Tenemos:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = t(\bar{x}) \cdot t(\bar{y}) = -\bar{x} \cdot \bar{y} \Rightarrow 2\bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = 0.$$

Por tanto S_1 y S_{-1} son ortogonales.

■

Teorema 3.3 Si una transformación ortogonal t es diagonalizable, entonces existe una base de autovectores ortonormal.

Prueba: Por el teorema anterior los subespacios característicos correspondientes a autovalores distintos son ortogonales. Por tanto si la transformación es diagonalizable, podemos construir una base de autovectores ortogonales formada a su vez por bases de autovectores ortogonales de cada uno de los dos subespacios característicos.

■

4 Orientación relativa de las bases.

Definición 4.1 Sea U un espacio vectorial real de dimensión finita. Dos bases B y B' se dice que tienen la misma **orientación** si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo:

$$|M_{BB'}| > 0$$

Proposición 4.2 *La relación "tener la misma orientación" es de equivalencia. Además el conjunto cociente tiene dos elementos.*

Prueba: Veamos que cumple las tres propiedades que caracterizan las relaciones de equivalencia.

1. Reflexiva: $M_{BB} = Id \Rightarrow |M_{BB}| = 1 \Rightarrow$ toda base B tiene la misma orientación que ella misma.
2. Simétrica: si B, B' tienen la misma orientación, entonces $|M_{B'B}| > 0$, y:

$$|M_{B'B}| = |M_{BB'}^{-1}| = \frac{1}{|M_{BB'}|} > 0.$$

3. Transitiva:

$$\left. \begin{array}{l} B, B' \text{ misma orientación} \Rightarrow |M_{BB'}| > 0 \\ B', B'' \text{ misma orientación} \Rightarrow |M_{B'B''}| > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow |M_{BB''}| = |M_{BB'} M_{B'B''}| = |M_{BB'}| |M_{B'B''}| > 0.$$

Por tanto B y B'' tiene la misma orientación.

Ahora probemos que sólo hay dos clases de equivalencia. Sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ una base de U . Está claro que la base:

$$B' = \{-\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$$

tiene distinta orientación que B , porque la matriz de cambio de base es:

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_{B'B}| = -1.$$

Veamos que cualquier otra base B'' tiene la misma orientación que una de estas dos. Si B'' tiene distinta orientación que B , entonces $|M_{B''B}| < 0$ y:

$$|M_{B'B''}| = |M_{B'B}| |M_{BB''}| > 0.$$

y por tanto B'' tiene la misma orientación que B' .

5 Transformaciones ortogonales directas o inversas.

Definición 5.1 *Sea $t : U \rightarrow U$ una transformación ortogonal, B una base de U y T_B la matriz asociada a t respecto a la base B . Decimos que t es una transformación:*

- **directa** si $|T_B| = 1$.
- **inversa** si $|T_B| = -1$.

Teniendo en cuenta que la fórmula de cambio de base de la matriz asociada a t es:

$$T'_B = (M_{BB'})^{-1}T_B M_{BB'},$$

la definición no depende de la base escogida, ya que matrices semejantes tienen el mismo determinante.

Por otra parte podemos dar la siguiente caracterización de las transformaciones directas e inversas:

Proposición 5.2 *Sea $t : U \rightarrow U$ una transformación ortogonal. Entonces t es una transformación:*

- **directa** si y sólo si conserva la orientación de las bases.
- **inversa** si y sólo si invierte la orientación de las bases.

Prueba: Sea $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ una base de U . Sea $t(B) = \{t(\bar{u}_1), \dots, t(\bar{u}_n)\}$ la imagen de esta base. Si T_B es la matriz de la aplicación t respecto a la base B se tiene:

$$(t(\bar{u}_j)) = (\bar{u}_i)T_B.$$

Por tanto, la matriz de cambio de base entre B y $t(B)$ es:

$$M_{Bt(B)} = T_B.$$

Entonces:

$$\begin{array}{llll} t \text{ directa} & \iff & |M_{Bt(B)}| = |T_B| = 1 & \iff & B \text{ y } t(B) \text{ misma orientación.} \\ t \text{ inversa} & \iff & |M_{Bt(B)}| = |T_B| = -1 & \iff & B \text{ y } t(B) \text{ distinta orientación.} \end{array}$$

■

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. La composición de dos transformaciones ortogonales directas es directa.
2. La composición de dos transformaciones ortogonales inversas es directa.
3. La composición de dos transformaciones ortogonales una directa y otra inversa es inversa.
4. La inversa de una transformación ortogonal directa es directa.
5. La inversa de una transformación ortogonal inversa es inversa.

6 Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2 .

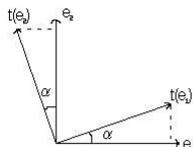
Comenzaremos describiendo las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^2

6.1 Giros en \mathbb{R}^2 .

Teorema 6.1 Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^2 y α un ángulo cualquiera. El giro de ángulo α con respecto a la orientación dada por la base B tiene por matriz asociada:

$$T_B = \begin{pmatrix} \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sin}(\alpha) \\ \text{Sin}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Prueba: Si tenemos en cuenta el siguiente dibujo:



$$\begin{aligned} t(\bar{e}_1) &= \text{Cos}(\alpha)\bar{e}_1 + \text{Sin}(\alpha)\bar{e}_2 \\ t(\bar{e}_2) &= -\text{Sin}(\alpha)\bar{e}_1 + \text{Cos}(\alpha)\bar{e}_2 \end{aligned}$$

Por tanto obtenemos la matriz T_B descrita en el enunciado. ■

6.1.1 Procedimiento para hallar la matriz de un giro de ángulo dado en una base cualquiera.

Supongamos que nos dan una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ **no necesariamente ortonormal** y nos piden calcular la matriz de un giro de ángulo α en esta base con respecto a la orientación que define.

Los pasos para hallar la matriz de giro son:

1. Calcular una base $B' = \{\bar{u}'_1, \bar{u}'_2\}$ ortonormal.
2. Comprobar que esta base tiene la misma orientación que la base de partida, es decir $|M_{B'B}| > 0$. Si no la tuviese cambiamos el vector \bar{u}'_1 por $-\bar{u}'_1$.
3. La matriz de giro respecto a la base B' es:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sin}(\alpha) \\ \text{Sin}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

4. Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

$$T_B = M_{BB'}T_{B'}(M_{BB'})^{-1}.$$

Hay que tener en cuenta que, en todos aquellos pasos donde aparezca el producto escalar (o normas), hay que utilizar la correspondiente matriz de Gram respecto a la base en que se esté trabajando. Si la base en que se trabaja es ortonormal, la matriz de Gram es la identidad y el producto escalar el usual.

6.2 Simetrías en \mathbb{R}^2 .

Teorema 6.2 Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ una base ortogonal de \mathbb{R}^2 . La simetría respecto al eje generado por \bar{e}_1 tiene por matriz asociada:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prueba: Basta tener en cuenta que el eje de simetría es invariante, mientras que los vectores perpendiculares a él son cambiados de signo:

$$t(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; \quad t(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2.$$

Observación 6.3 *También puede considerarse una simetría respecto al origen, pero es equivalente a un giro de ángulo π . La matriz asociada a esta simetría respecto a cualquier base es $-Id$.*

6.2.1 Procedimiento para hallar la matriz de una simetría en una base cualquiera.

Supongamos que nos dan una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ **no necesariamente ortonormal** y nos piden calcular la matriz de una simetría respecto al eje generado por un vector \bar{u}_1 .

Los pasos para hallar la matriz de la simetría son:

1. Completamos \bar{u}_1 a una base ortogonal: $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$.
2. La matriz de la simetría respecto a esta base será:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

$$T_B = M_{BB'}T_{B'}(M_{BB'})^{-1}.$$

6.3 Clasificación de transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2 .

Teorema 6.4 *Toda transformación ortogonal t en \mathbb{R}^2 distinta de la identidad es un giro o una simetría respecto a un eje.*

Prueba: Sea T la matriz de t respecto a una base B ortonormal. Sabemos que:

$$T^t T = Id. \quad |T| = \pm 1. \quad \text{Los autovalores reales de } T \text{ son } 1 \text{ ó } -1.$$

Hay las siguientes posibilidades:

1. T tiene un único autovalor real $\lambda = 1$ con multiplicidad 2. Entonces T es semejante a la identidad y por tanto de hecho $T = Id$.
2. T tiene un único autovalor real $\lambda = -1$ con multiplicidad 2. Entonces T es semejante a $-Id$ y de hecho $T = -Id$. Se trata de un giro de ángulo π o una simetría respecto al origen.
3. T tiene por autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Entonces T es semejante a la matriz

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En particular existe una base ortonormal B' respecto a la cual la matriz de t es la anterior. Deducimos que se trata de una simetría respecto a un eje. Teniendo en cuenta que dicho eje está formado por vectores que no varían por la simetría, el eje es el subespacio característico S_1 .

4. T no tiene autovalores reales. Supongamos que T es de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Como $TT^t = Id$

$$a^2 + c^2 = 1; \quad ab + cd = 0; \quad b^2 + d^2 = 1;$$

Además el polinomio característico es:

$$|T - \lambda Id| = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

Teniendo en cuenta que el discriminante es $(a + d)^2 - 4(ad - bc)$ para que no tenga autovalores reales tiene que cumplirse:

$$ad - bc > 0.$$

Podemos tomar:

$$a = \text{Cos}(\alpha), \quad c = \text{Sin}(\alpha); \quad b = \text{Sin}(\beta), \quad d = \text{Cos}(\beta).$$

para ciertos valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ahora:

$$\begin{aligned} ab + cd = 0 &\Rightarrow \text{Cos}(\alpha)\text{Sin}(\beta) + \text{Sin}(\alpha)\text{Cos}(\beta) = 0 \Rightarrow \text{Sin}(\alpha + \beta) = 0. \\ ad - bc > 0 &\Rightarrow \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) - \text{Sin}(\alpha)\text{Sin}(\beta) > 0 \Rightarrow \text{Cos}(\alpha + \beta) > 0. \end{aligned}$$

Deducimos que $\alpha + \beta = 0$ y por tanto:

$$\begin{aligned} b = \text{Sin}(\beta) &= \text{Sin}(-\alpha) = -\text{Sin}(\alpha) = -a. \\ d = \text{Cos}(\beta) &= \text{Cos}(-\alpha) = \text{Cos}(\alpha) = c. \end{aligned}$$

Vemos que T puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sin}(\alpha) \\ \text{Sin}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) \end{pmatrix}$$

y por tanto se trate de un giro de ángulo α respecto a la orientación dada por la base B . ■

Resumimos la clasificación en el siguiente cuadro:

Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2		
Autovalores	Clasificación	Tipo
$\{1, 1\}$	<i>Identidad</i>	Directa
$\{1, -1\}$	<i>Simetría respecto a S_1.</i>	Inversa
$\{-1, -1\}$	<i>Simetría respecto al origen.</i> \Updownarrow Giro de ángulo π .	Directa
no reales	<i>Giro de ángulo α:</i> $T_B = \begin{pmatrix} \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sin}(\alpha) \\ \text{Sin}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) \end{pmatrix}$ B base ORTONORMAL.	Directa

7 Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^3 .

Comenzaremos describiendo las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^3 .

7.1 Giros en \mathbb{R}^3 .

Teorema 7.1 Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base **ortonormal** de \mathbb{R}^3 y α un ángulo cualquiera. El giro de ángulo α sobre el semieje de giro generador por \bar{e}_1 y con respecto a la orientación dada por la base B tiene por matriz asociada:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sin}(\alpha) \\ 0 & \text{Sin}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Prueba: Basta tener en cuenta que el semieje de giro \bar{e}_1 queda invariante por el giro. Mientras que al plano perpendicular generado por la base ortonormal $\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ le aplicamos la matriz de giro en \mathbb{R}^2 vista en la sección anterior.

Observación 7.2 Hay que tener en cuenta que para definir un giro en \mathbb{R}^3 son imprescindibles:

1. el semieje de giro (no sólo el eje).
2. la orientación que sirve de referencia.
3. el ángulo de giro.

Los dos primeros datos son los que permiten identificar en que sentido se toman los ángulos positivos.

7.1.1 Procedimiento para hallar la matriz de un giro en \mathbb{R}^3 en una base cualquiera.

Supongamos que nos dan una base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ **no necesariamente ortonormal** y nos piden calcular la matriz respecto a la base B de un giro de ángulo α , semieje \bar{v} y con la orientación dada por la base B .

Los pasos para hallar la matriz de giro son:

1. Calcular una base $B' = \{\bar{v}'_1, \bar{v}'_2, \bar{v}'_3\}$ **ortonormal**, de manera que

$$\bar{v}'_1 = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$

2. Comprobar que esta base tiene la misma orientación que la de partida, es decir $|M_{BB'}| > 0$. Si no la tuviese cambiamos el vector \bar{v}'_2 por $-\bar{v}'_2$.
3. La matriz de giro respecto a la base B' es:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sin}(\alpha) \\ 0 & \text{Sin}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) \end{pmatrix}$$

4. Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

$$T_B = M'_{BB} T_{B'} M_{BB'}^{-1}.$$

Será útil tener en cuenta que **si la base de partida B ya era ortonormal, entonces la matriz de paso $M_{BB'}$ es ortogonal y la inversa coincide con la traspuesta.**

Como antes, en todos aquellos pasos donde aparezca el producto escalar (o normas), hay que utilizar la correspondiente matriz de Gram respecto a la base en que se esté trabajando. Si la base en que se trabaja es ortonormal, la matriz de Gram es la identidad y el producto escalar el usual.

7.2 Simetrías en \mathbb{R}^3 .

7.2.1 Simetrías respecto al origen.

Teorema 7.3 *Sea B una base cualquiera de \mathbb{R}^3 . La simetría respecto al origen tiene por matriz asociada $T_B = -Id$.*

Prueba: Basta tener en cuenta que la simetría respecto al origen invierte el signo de cualquier vector. ■

7.2.2 Simetría respecto a una recta.

Teorema 7.4 *Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortogonal de \mathbb{R}^3 . La simetría respecto al eje generado por \bar{e}_1 tiene por matriz asociada:*

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prueba: Basta tener en cuenta que el eje de simetría es invariante, mientras que los vectores perpendiculares a él son cambiados de signo:

$$t(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; \quad t(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2; \quad t(\bar{e}_3) = -\bar{e}_3.$$

7.2.3 Simetría respecto a un plano.

Teorema 7.5 *Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortogonal de \mathbb{R}^3 . La simetría respecto al plano generado por \bar{e}_1, \bar{e}_2 tiene por matriz asociada:*

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prueba: Basta tener en cuenta que el plano de simetría es invariante, mientras que los vectores perpendiculares a él son cambiados de signo:

$$t(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; \quad t(\bar{e}_2) = \bar{e}_2; \quad t(\bar{e}_3) = -\bar{e}_3.$$

7.2.4 Procedimiento para hallar la matriz de una simetría en una base cualquiera.

Supongamos que nos dan una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ **no necesariamente ortonormal** y nos piden calcular la matriz de una simetría respecto al:

1. Eje generado por un vector \bar{u}_1 .
2. Plano generado por un vector \bar{u}_1, \bar{u}_2 .

Los pasos para hallar la matriz de la simetría son:

1. Simetría respecto al eje generado por \bar{u}_1 .

- (a) Completamos \bar{u}_1 a una base ortogonal: $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$. En realidad sólo necesitamos que \bar{u}_2, \bar{u}_3 sean perpendiculares a \bar{u}_1 .
- (b) La matriz de la simetría respecto a esta base será:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

$$T_B = M'_{BB'} T_{B'} M_{BB'}^{-1}.$$

2. Simetría respecto al plano generado por \bar{u}_1, \bar{u}_2 .

- (a) Completamos \bar{u}_1 a una base: $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, con \bar{u}_3 ortogonal al plano $\mathcal{L}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$.
- (b) La matriz de la simetría respecto a esta base será:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Hacemos el cambio de base de la matriz $T_{B'}$:

$$T_B = M'_{BB'} T_{B'} M_{BB'}^{-1}.$$

7.3 Clasificación de transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^3 .

Teorema 7.6 *Toda transformación ortogonal t en \mathbb{R}^3 distinta de la identidad es:*

- un giro, ó
- una simetría respecto a un punto, a una recta o a un plano, ó
- composición de un giro y una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Prueba: Sea T la matriz de t respecto a una base B ortonormal. Sabemos que:

$$TT^t = Id. \quad |T| = \pm 1. \quad \text{Los autovalores reales de } T \text{ son } 1 \text{ ó } -1.$$

Hay las siguientes posibilidades:

1. T tiene un único autovalor real $\lambda = 1$ con multiplicidad 3. Entonces T es semejante a la identidad y por tanto de hecho $T = Id$.
2. T tiene un único autovalor real $\lambda = -1$ con multiplicidad 3. Entonces T es semejante a $-Id$ y de hecho $T = -Id$. Se trata de una simetría respecto al origen.
3. T tiene por autovalores $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = -1$, con multiplicidad 1. Entonces T es semejante a la matriz

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En particular existe una base ortonormal B' respecto a la cual la matriz de t es la anterior. Deducimos que se trata de una simetría respecto a un plano. Teniendo en cuenta que dicho plano está formado por vectores que no varían por la simetría, el plano de simetría es el subespacio característico S_1 .

4. T tiene por autovalores $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad 1 y $\lambda_2 = -1$, con multiplicidad 2. Entonces T es semejante a la matriz

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Razonando como antes vemos que t es una simetría respecto un eje correspondiente al subespacio característico S_1 .

5. T tiene un único autovalor real $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 1. Entonces \mathbb{R}^3 puede descomponerse como:

$$\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_1^\perp$$

donde S_1^\perp es un subespacio 2-dimensional invariante por t . La restricción de t a S_1^\perp es una transformación ortogonal que no tiene autovalores reales. Por la clasificación de transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2 sabemos que se trata de un giro.

Por tanto existe una base ortonormal $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ con

$$S_1 = \{\bar{u}_1\} \quad \text{y} \quad S_1^\perp = \{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$$

respecto a la cual la matriz asociada a t es:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

y por tanto se trata de un giro de ángulo α respecto a la orientación dada por la base B' y el semieje \bar{u}_1 .

6. T tiene un único autovalor real $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad 1. Razonando como antes deducimos que existe una base ortonormal $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ con

$$S_{-1} = \{\bar{u}_1\} \quad \text{y} \quad S_{-1}^\perp = \{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$$

respecto a la cual la matriz asociada a t es:

$$T_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

y por tanto se trata de la composición de un giro de ángulo α respecto a la orientación dada por la base B' y el semieje \bar{u}_1 , con una simetría respecto al plano S_{-1}^\perp . ■

Resumimos la clasificación en el siguiente cuadro:

Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^3		
Autovalores	Clasificación	Tipo
$\{1, 1, 1\}$	<i>Identidad</i>	Directa
$\{1, 1, -1\}$	<i>Simetría respecto al plano S_1.</i>	Inversa
$\{1, -1, -1\}$	<i>Simetría respecto al eje S_1.</i>	Directa
$\{-1, -1, -1\}$	<i>Simetría respecto al origen.</i>	Inversa
1, mult=1.	<p><i>Giro de ángulo α respecto al semieje \bar{u}_1:</i></p> $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\alpha) & -\text{Sin}(\alpha) \\ 0 & \text{Sin}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) \end{pmatrix}$ <p>$B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ base ORTONORMAL. $S_1 = \mathcal{L}\{\bar{u}_1\}$ $S_1^\perp = \mathcal{L}\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ Orientación dada por base B.</p>	Directa
-1, mult=1.	<p><u>Composición de:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Giro de ángulo α respecto al semieje \bar{u}_1:</i> $T_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\alpha) & \text{Sin}(\alpha) \\ 0 & -\text{Sin}(\alpha) & \text{Cos}(\alpha) \end{pmatrix}$ <p>$B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ base ORTONORMAL. $S_{-1} = \mathcal{L}\{\bar{u}_1\}$ $S_{-1}^\perp = \mathcal{L}\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ Orientación dada por base B.</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Simetría respecto al plano S_{-1}^\perp.</i> 	Inversa

7.4 Método alternativo de clasificación transformaciones ortogonales.

Expondremos un método alternativo para clasificar transformaciones ortogonales en dimensión 2 y 3. El resultado conocido en el que se basa es el siguiente:

Proposición 7.7 *El determinante y la traza de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base.*

Teniendo en cuenta esto y que, dependiendo de que tipo de transformación ortogonal se trate, hemos estudiado cuales son sus matrices asociadas respecto a bases ortonormales adecuadas, veamos como clasificar.

7.4.1 Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2 .

Si la transformación ortogonal es una simetría respecto a una recta la matriz asociada respecto a una base ortonormal adecuada (uno de los vectores es el que genera el eje de

simetría), vimos que es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos determinante -1 y traza 0 .

Si la transformación ortogonal es un giro la matriz asociada respecto a una base ortonormal es:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Tenemos determinante 1 y traza $2\cos(\alpha)$. En este caso están incluidas las situaciones particulares en las que el ángulo es 0 y por tanto la transformación es la identidad o el ángulo es de 180° y la transformación es una simetría respecto al origen.

Vemos que la traza nos permite calcular el coseno del ángulo, de manera, que este puede ser escogido entre el intervalo $[0, \pi]$. El problema que hay que resolver es si este ángulo ha de tomarse con signo positivo o negativo, dependiendo de la orientación que estemos manejando.

Para ello, si trabajamos con la orientación dada por la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, consideramos la base $B' = \{\bar{e}_1, f(\bar{e}_1)\}$. Si ambas bases tienen la misma orientación, entonces el ángulo ha de ser tomado con signo positivo; si tienen distinta, el ángulo se toma con sentido negativo.

Resumimos todo esto en el siguiente cuadro:

Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2		
Orientación dada por $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. F matriz asociada en cualquier base		
Det(F)	Traza(F)	Clasificación
1	2	<i>Identidad</i>
1	-2	<i>Simetría respecto al origen.</i> \Updownarrow Giro de ángulo π .
1	$\neq 2, -2$	<i>Giro de ángulo α:</i> $B' = \{\bar{e}_1, \bar{f}(e_1)\}$ Si $ M_{BB'} > 0$, $\alpha = +\arccos(\text{traza}(F)/2)$. Si $ M_{BB'} < 0$, $\alpha = -\arccos(\text{traza}(F)/2)$.
-1	0	<i>Simetría respecto a S_1</i>

7.4.2 Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^3 .

Estudiando, para cada tipo de transformación, la traza y el determinante, obtenemos la siguiente tabla de clasificación.

Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^3		
Orientación dada por base B . F matriz asociada en cualquier base		
Det(F)	Traza(F)	Clasificación
1	3	<i>Identidad</i>
1	-1	<i>Simetría respecto a la recta S_1</i>
1	$\neq 3, -1$	<p><i>Giro de ángulo α respecto al semieje \bar{u}_1:</i> $\bar{u}_1 =$ autovector asociado al 1 \bar{v} vector linealmente independiente con \bar{u}_1 $B' = \{\bar{u}_1, \bar{v}, \bar{f}(v)\}$ Si $M_{BB'} > 0$, $\alpha = +\arccos((\text{traza}(F) - 1)/2)$. Si $M_{BB'} < 0$, $\alpha = -\arccos((\text{traza}(F) - 1)/2)$.</p>
-1	-3	<i>Simetría respecto al origen.</i>
-1	1	<i>Simetría respecto al plano S_1</i>
-1	$\neq -3, 1$	<p><u>Composición de giro y simetría:</u> - <i>Giro de ángulo α respecto al semieje \bar{u}_1:</i> $\bar{u}_1 =$ autovector asociado al -1 \bar{v} vector linealmente independiente con \bar{u}_1 $B' = \{\bar{u}_1, \bar{v}, \bar{f}(v)\}$ Si $M_{B'B} > 0$, $\alpha = +\arccos((\text{traza}(F) + 1)/2)$. Si $M_{B'B} < 0$, $\alpha = -\arccos((\text{traza}(F) + 1)/2)$. - <i>Simetría respecto al plano S_{-1}^\perp.</i></p>