Part II

Espacios vectoriales euclídeos.

1. Introducción a los espacios euclídeos.

1 Producto escalar.

1.1 Definición.

Definición 1.1 *Sea U un espacio vectorial real. Se llama* **producto escalar** *a una forma bilineal simétrica y definida positiva.*

Si $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal correspondiente a un producto escalar, la imagen de dos vectores se denotará normalmente como:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Con esta notación las propiedades que han de cumpirse para que efectivamente f defina un producto escalar son:

1. **Bilinealidad:** Para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ha de cumplirse:

$$\begin{array}{c} (\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \cdot \bar{z} = \alpha\bar{x} \cdot \bar{z} + \beta\bar{y} \cdot \bar{z}. \\ \bar{x} \cdot (\alpha\bar{y} + \beta\bar{z}) = \alpha\bar{x} \cdot \bar{y} + \beta\bar{x} \cdot \bar{z}. \end{array}$$

2. **Simetría:** Para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in U$, se tendrá:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}.$$

3. **Definida positiva:** Para cualquier $\bar{x} \in U$ no nulo:

$$\bar{x} \cdot \bar{x} > 0.$$

Definición 1.2 *Un* **espacio vectorial euclídeo** *o un* **espacio euclídeo** *es un espacio vectorial real donde hemos definido un producto escalar.*

1.2 Matriz de Gram de un producto escalar.

Definición 1.3 *Sea U un espacio vectorial euclídeo, es decir, con una forma bilineal f simétrica y definida positiva. Sea $B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ una base de U. Llamamos* **matriz de Gram** *del producto escalar con respecto a la base B a la matriz G_B asociadad a la forma bilineal f respecto a esta base.*

Con la notación que utilizamos para el producto escalar. La matriz de Gram respecto a la base B es de la forma:

$$G_B = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 & \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 & \ldots & \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_n \\ \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 & \ldots & \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{u}_n \cdot \bar{u}_1 & \bar{u}_n \cdot \bar{u}_2 & \ldots & \bar{u}_n \cdot \bar{u}_n \end{pmatrix}.$$

La expresión matricial del producto escalar respecto a esta base queda:

$$\boxed{\bar{x} \cdot \bar{y} = (x)^t G(y)}$$

siendo $(x^i), (y^i)$ las coordenadas de los vectores $\bar{x}, \bar{y}$ respecto a la base B.

Teniendo en cuenta que un producto escalar corresponde a una forma bilineal simétrica y definida positiva, la matriz de Gram cumple las siguientes propiedades:

1. *G_B es simétrica.*
2. *G_B es definida positiva.*
3. *G_B es congruente con la identidad. Es decir, siempre existe una base respecto a la cual la matriz de Gram del producto escalar es la identidad.*

   Prueba: Basta recordar que hemos visto que toda matriz simétrica y definida positiva es congruente con la identidad.
4. *Si B y B' son dos bases del espacio vectorial U, entonces:*

$$\boxed{G'_B = (M_{BB'})^t G_B M_{BB'}}$$

5. *La matriz de Gram es un tensor homogéneo de segundo orden totalmente covariante.*

   Prueba: Basta tener en cuenta como se comporta con el cambio de base.

2 Norma de un vector.

Definición 2.1 *Sea U un espacio vectorial euclídeo. Se llama* **norma o módulo** *de un vector $\bar{x}$ a:*

$$\|\bar{x}\| = +\sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}.$$

Dado que el producto escalar es una forma bilineal simétrica y definida positiva, $\bar{x} \cdot \bar{x}$ siempre es no negativo, por lo que la raíz cuadrada toma valores reales.

Veamos algunas propiedades fundamentales de la norma:

1. $\|\bar{x}\| = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$.

   Prueba:

$$\|\bar{x}\| = 0 \iff \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por ser el producto escalar definido positivo}}}{\iff} \quad \bar{x} = \bar{0}$$

2. $\|\bar{x}\| > 0$ *para cualquier* $\bar{x} \neq \bar{0}$.
3. $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda|\|\bar{x}\|$, *para cualesquiera* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in U$. **Prueba:**

$$\|\lambda\bar{x}\| = +\sqrt{(\lambda\bar{x}) \cdot (\lambda\bar{x})} = +\sqrt{\lambda^2 \bar{x} \cdot \bar{x}} = +|\lambda|\sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = |\lambda|\|\bar{x}\|$$

4. *Desigualdad de Schwarz:*

$$\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \geq |\bar{x} \cdot \bar{y}|$$

para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in U$.

Prueba I: Distinguimos dos posibilidades:

- Si $\bar{x}, \bar{y}$ son dependientes, o bien $\bar{x} = \bar{0}$, con lo cual el resultado es inmediato, o bien $\bar{y} = \lambda\bar{x}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. En ese caso:

$$\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| = \|\bar{x}\|\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda|\|\bar{x}\|^2$$

y

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| = |\bar{x} \cdot (\lambda\bar{x})| = |\lambda||\bar{x} \cdot \bar{x}| = |\lambda|\|\bar{x}\|^2.$$

- Si son independientes podemos considerar la restricción del producto escalar al subespacio $V = \mathcal{L}\{\bar{x}, \bar{y}\}$ generado por ambos. La forma bilineal que proporciona el producto escalar restringida a V sigue siendo definida positiva. La matriz de esa forma bilineal respecto a la base $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ es:

$$G' = \begin{pmatrix} \bar{x} \cdot \bar{x} & \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \bar{y} \cdot \bar{x} & \bar{y} \cdot \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\bar{x}\|^2 & \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \bar{x} \cdot \bar{y} & \|\bar{y}\|^2 \end{pmatrix}$$

Por ser definida positiva su determinante es mayor que 0:

$$|G'| > 0 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{x}\|^2\|\bar{y}\|^2 > (\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{x}\|\|\bar{y}\| > |\bar{x} \cdot \bar{y}|.$$

Prueba II: Consideramos el vector $\bar{x} + \lambda\bar{y}$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Por ser el producto escalar definido positivo se tiene:

$$\begin{aligned} (\bar{x} + \lambda\bar{y}) \cdot (\bar{x} + \lambda\bar{y}) > 0 \quad & \Rightarrow \quad \bar{x} \cdot \bar{x} + \lambda\bar{x} \cdot \bar{y} + \lambda\bar{y} \cdot \bar{x} + \lambda^2\bar{y} \cdot \bar{y} \geq 0 \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad \|\bar{y}\|^2\lambda^2 + 2(\bar{x} \cdot \bar{y})\lambda + \|\bar{x}\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Es decir, obtenemos una ecuación de segundo grado en λ que nunca toma valores negativos. Por tanto a lo sumo puede tener una solución real (doble) y el discriminante de esa ecuación no puede ser positivo:

$$(2(\bar{x} \cdot \bar{y}))^2 - 4\|\bar{y}\|^2\|\bar{x}\|^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \geq |\bar{x} \cdot \bar{y}|.$$

5. *Desigualdad de Minkowski:*

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in U$.

Prueba: Se tiene:

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 & = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y} = \\ & = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{y} \leq \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2|\bar{x} \cdot \bar{y}| \end{aligned}$$

y aplicando la desigualdad de Schwarz:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 \leq \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \leq (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2.$$

Definición 2.2 *En un espacio euclídeo U se llama* **vector unitario** *al que tiene norma 1.*

3 Ángulo entre dos vectores.

Definición 3.1 *Sea U un espacio euclídeo. Dados dos vectores no nulos $\bar{x}, \bar{y} \in U$ defimos el* **ángulo** *que forman como el valor $(\bar{x}, \bar{y}) \in [0, \pi]$ verificando:*

$$cos(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|}.$$

Por la desigualdad de Schwarz:

$$-1 \leq \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|} \leq 1.$$

Por tanto en el intervalo $[0, \pi]$ sólo existe un ángulo cuyo coseno sea el anterior.

Con esta definición de ángulo se verifica:

$$\boxed{\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\| \, cos(\bar{x}, \bar{y})}$$