FORMA BILINEAL en U: aplicación $f: U \times U \to R$

$$\left\{\begin{array}{ll} i)\ f(a\vec{u}+b\vec{v},\vec{w}) = af(\vec{u},\vec{w}) + bf(\vec{v},\vec{w}) & \text{LINEALIDAD en la 1ª componente} \\ ii)\ f(\vec{w},a\vec{u}+b\vec{v}) = af(\vec{w},\vec{u}) + bf(\vec{w},\vec{v}) & \text{LINEALIDAD en la 2ª componente} \end{array}\right\} \text{ BILINEALIDAD}$$

MATRIZ ASOCIADA a f respecto de la base B

$(F_B)_{ij} = \left(f(\vec{u_i},\vec{u_j})\right)$

$$F_B = \begin{pmatrix} f(\vec{u_1},\vec{u_1}) & f(\vec{u_1},\vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_1},\vec{u_n}) \\ f(\vec{u_2},\vec{u_1}) & f(\vec{u_2},\vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_2},\vec{u_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\vec{u_n},\vec{u_1}) & f(\vec{u_n},\vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_n},\vec{u_n}) \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

CAMBIO de BASE por CONGRUENCIA

$$\boxed{F_{B'} = M^t_{BB'} F_B M_{BB'}}$$

f es simétrica $\Leftrightarrow$ $f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u})$ $\Leftrightarrow$ F_B simétrica

f es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $f(\vec{u},\vec{v}) = -f(\vec{v},\vec{u})$ $\Leftrightarrow$ F_B antisimétrica

---

Dada una **forma bilineal simétrica** $f: U \times U \to R$ se llama **FORMA CUADRÁTICA asociada a f** a la aplicación $\omega: U \to R$ definida como $\omega(\vec{u}) = f(\vec{u},\vec{u})$.

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **conjugados** respecto de ω, si $f(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

$\vec{u}$ es **AUTOCONJUGADO** respecto de ω, si $f(\vec{u},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \omega(\vec{u}) = 0$.

Subespacio conjugado de $A \subset U$ respecto de ω. $\quad conj(A) = \{\vec{v} \in U | f(\vec{u},\vec{v}) = 0 \text{ para todo } \vec{u} \in A\}$ $\quad$ Conjunto de vectores conjugados a todos los de A

$B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ **base de vectores conjugados** $\Leftrightarrow$ cada pareja de vectores de ella son conjugados entre si $\Leftrightarrow$ F_B diagonal

RANGO: $\mathrm{rango}(\omega) = \mathrm{rango}(F_B)$

NÚCLEO: $ker(\omega) = conj(U) = \{(v)_B \in U | F_B (v)_B = \vec{0}\}$

$\dim(ker(\omega)) = \dim(U) - rango(\omega)$

CLASIFICACIÓN por signatura :

- ω es **DEFINIDA POSITIVA** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (\mathrm{n}, 0)$ $\Leftrightarrow$ $\omega(\vec{x}) > 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0$
- ω es **DEFINIDA NEGATIVA** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (0, \mathrm{n})$ $\Leftrightarrow$ $\omega(\vec{x}) < 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0$
- ω es **SEMIDEFINIDA POSITIVA** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (\mathrm{p}, 0),\ \mathrm{p} < \mathrm{n}$ $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \omega(\vec{x}) \geq 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) = 0, \text{ para algún } \vec{y} \neq 0 \end{array}\right.$
- ω es **SEMIDEFINIDA NEGATIVA** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (0, \mathrm{q}),\ \mathrm{q} < \mathrm{n}$ $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \omega(\vec{x}) \leq 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) = 0, \text{ para algún } \vec{y} \neq 0 \end{array}\right.$
- ω es **INDEFINIDA** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (\mathrm{p}, \mathrm{q}),\ \mathrm{q}, \mathrm{p} \geq 1$ $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \omega(\vec{x}) > 0, \text{ para algún } \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) < 0, \text{ para algún } \vec{y} \neq 0 \end{array}\right.$

CLASIFICACIÓN por rango:

$\mathrm{rango}(\omega) = dim(U) \Leftrightarrow$ **NO DEGENERADA**

$\mathrm{rango}(\omega) < dim(U) \Leftrightarrow$ **DEGENERADA**

Aplicación para calcular AUTOCONJUGADOS:

DEF. POSITIVA ó NEGATIVA $\Leftrightarrow$ $autoconj(\omega) = \{\vec{0}\}$

SEMIDEF. POSITIVA ó NEGATIVA $\Leftrightarrow$ $autoconj(\omega) = \ker(\omega)$

INDEFINIDA $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} rango(\omega) = 2 \Leftrightarrow \text{Dos hiperplanos} \\ rango(\omega) > 2 \Leftrightarrow \text{No se puede simplificar} \end{array}\right.$

Criterio de Sylvester

$F_1 = (a_{11}),\quad F_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad F_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, etc…

F es **DEFINIDA POSITIVA** $\Leftrightarrow \det(F_1) > 0,\quad \det(F_2) > 0,\quad \det(F_3) > 0\quad, \dots,\quad \det(F_n) > 0$

F es **DEFINIDA NEGATIVA** $\Leftrightarrow \det(F_1) < 0,\quad \det(F_2) > 0,\quad \det(F_3) < 0\quad, \dots,\quad (-1)^{\mathrm{n}}\det(F_n) > 0$