Álgebra Lineal II

TEMA I- Aplicaciones bilineales.

Capítulo 1. Formas bilineales y formas cuadráticas.

Formas bilineales.

Luis Fuentes García (2022).

Formas bilineales (I): Motivación y definición.

Motivación:

Producto escalar: nos sirve para medir ángulos y distancias ("hacer" geometría).

Ejemplo. Producto escalar usual: $(x, y) \cdot (x', y') = x \cdot x' + y \cdot y'$

$$(1,2) \cdot (3, -1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1$$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ (dos vectores se transforma en un número) ⟶ $f: R^2 \times R^2 \to R$ $\quad f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

$(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = a\vec{u} \cdot \vec{w} + b\vec{v} \cdot \vec{w}$ ⟶ $f(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = af(\vec{u}, \vec{w}) + bf(\vec{v}, \vec{w})$ **LINEALIDAD** en la **1ª componente**

$\vec{w} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{w} \cdot \vec{u} + b\vec{w} \cdot \vec{v}$ ⟶ $f(\vec{w}, a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{w}, \vec{u}) + bf(\vec{w}, \vec{v})$ **LINEALIDAD** en la **2ª componente**

BILINEALIDAD

Definición (forma bilineal):

Dado un **espacio vectorial** U una **forma bilineal** en U, es una aplicación $f: U \times U \to R$ **lineal en cada componente**, es decir, cumpliendo:

$$\left.\begin{array}{ll} i)\ f(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = af(\vec{u}, \vec{w}) + bf(\vec{v}, \vec{w}) & \textbf{LINEALIDAD} \text{ en la } \textbf{1ª componente} \\ ii)\ f(\vec{w}, a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{w}, \vec{u}) + bf(\vec{w}, \vec{v}) & \textbf{LINEALIDAD} \text{ en la } \textbf{2ª componente} \end{array}\right\} \textbf{BILINEALIDAD}$$

Formas bilineales (II). Ejemplos.

Definición (forma bilineal):

Dado un **espacio vectorial** U una **forma bilineal** en U, es una aplicación $f: U \times U \rightarrow R$ lineal en cada componente, es decir, cumpliendo:

$$\left.\begin{array}{ll} i)\ f(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = af(\vec{u}, \vec{w}) + bf(\vec{v}, \vec{w}) & \textbf{LINEALIDAD} \text{ en la } \textbf{1ª componente} \\ ii) f(\vec{w}, a\vec{u} + b\vec{v}\,) = af(\vec{w}, \vec{u}) + bf(\vec{w}, \vec{v}) & \textbf{LINEALIDAD} \text{ en la } \textbf{2ª componente} \end{array}\right\} \quad \textbf{BILINEALIDAD}$$

Ejemplo 1: $f: R^2 \times R^2 \rightarrow R,\qquad f\big((x,y),(x',y')\big) = xx' - xy' + 2yx' + 3yy'$ **¿ BILINEAL ?**

i) LINEALIDAD en la **1ª componente** $\qquad \vec{u} = (x,y) \qquad \vec{v} = (x',y') \qquad \vec{w} = (x'',y'')$

$$\begin{aligned} f(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) &= f(a(x,y) + b(x',y'), (x'',y'')) = f((ax + bx', ay + by'), (x'',y'') = \\ &= (ax + bx')x'' - (ax + bx')y'' + 2(ay + by')x'' + 3(ay + by')y'' = \\ &= axx'' + bx'x'' - axy'' - bx'y'' + 2ayx'' + 2by'x'' + 3ayy'' + 3by'y'' \end{aligned}$$

IGUALES

$$\begin{aligned} af(\vec{u}, \vec{w}) + bf(\vec{v}, \vec{w}) &= af\big((x,y),(x'',y'')\,\big) + bf\big((x',y'),(x'',y'')\,\big) = \\ &= a(xx'' - xy'' + 2yx'' + 3yy'') + b(x'x'' - x'y'' + 2y'x'' + 3y'y'') = \\ &= axx'' - axy'' + 2ayx'' + 3ayy'' + bx'x'' - bx'y'' + 2by'x'' + 3by'y'' \end{aligned}$$

¡SI ES BILINEAL!

ii) LINEALIDAD en la **2ª componente**

$$\left.\begin{array}{l} f(\vec{w}, a\vec{u} + b\vec{v}\,) = f\big((x'',y''), a(x,y) + b(x',y')\big) = \cdots \textit{cuentas} \ldots \\ af(\vec{w}, \vec{u}) + bf(\vec{w}, \vec{v}) = af\big((x'',y''),(x,y)\big) + bf\big((x'',y''),(x',y')\big) = \cdots \textit{cuentas} \ldots \end{array}\right\}$$

Formas bilineales (II). Ejemplos.

Definición (forma bilineal):

Dado un **espacio vectorial** U una **forma bilineal** en U, es una aplicación $f: U \times U \to R$ lineal en cada componente, es decir, cumpliendo:

$$i)\ f(a\vec{u}+b\vec{v},\vec{w}) = af(\vec{u},\vec{w}) + bf(\vec{v},\vec{w}) \qquad \text{LINEALIDAD en la 1ª componente}$$

$$ii)\ f(\vec{w},a\vec{u}+b\vec{v}) = af(\vec{w},\vec{u}) + bf(\vec{w},\vec{v}) \qquad \text{LINEALIDAD en la 2ª componente}$$

BILINEALIDAD

Ejemplo 2: $P_2(R)$ polinomios de grado ≤ 2

$$f: P_2(R) \times P_2(R) \to R, \qquad f(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

¿ BILINEAL ?

i) LINEALIDAD en la **1ª componente** $\qquad \vec{u} = p(x) \qquad \vec{v} = q(x) \qquad \vec{w} = r(x)$

¡SI ES BILINEAL!

$$f(a\vec{u}+b\vec{v},\vec{w}) = f(ap(x)+bq(x),r(x)) = \int_0^1 \big(ap(t)+bq(t)\big)r(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \big(ap(t)r(t)+bq(t)r(t)\big)dt = \int_0^1 ap(t)r(t)dt + \int_0^1 bq(t)r(t)dt =$$

$$= a\int_0^1 p(t)r(t)dt + b\int_0^1 q(t)r(t)dt \leftarrow \underline{\text{IGUALES}} \searrow$$

$$af(\vec{u},\vec{w}) + bf(\vec{v},\vec{w}) = af(p(x),r(x)) + bf(q(x),r(x)) = a\int_0^1 p(t)r(t)dt + b\int_0^1 q(t)r(t)dt$$

ii) LINEALIDAD en la **2ª componente**

$$f(\vec{w},a\vec{u}+b\vec{v}) = f(r(x),ap(x)+bq(x)) = \cdots cuentas \ldots$$

$$af(\vec{w},\vec{u}) + bf(\vec{w},\vec{v}) = af(r(x),p(x)) + bf(r(x),p(x)) = \cdots cuentas \ldots$$

IGUALES

Formas bilineales (III): Matriz asociada.

$f: U \times U \to R$ **forma bilineal**

$B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ base de U

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{u_n}$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B = y_1\overrightarrow{u_1} + y_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + y_n\overrightarrow{u_n}$$

Linealidad en la 1ª componente

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2}, y_1\overrightarrow{u_1} + y_2\overrightarrow{u_2}) = x_1 f(\overrightarrow{u_1}, y_1\overrightarrow{u_1} + y_2\overrightarrow{u_2}) + x_2 f(\overrightarrow{u_2}, y_1\overrightarrow{u_1} + y_2\overrightarrow{u_2}) =$$

$$= x_1 y_1 f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}) + x_1 y_2 f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) + x_2 y_1 f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) + x_2 y_2 f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \\ f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_B$$

Linealidad en la 2ª componente

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \qquad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

Matriz asociada a f respecto de la base B

$$F_B = \begin{pmatrix} f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_n}) \\ f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_n}) \end{pmatrix}$$

$$(F_B)_{ij} = \left(f(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j})\right)$$

Formas bilineales (IV). Matriz asociada: ejemplos.

$f: U \times U \to R$ **forma bilineal** $\quad B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ **base de** U

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \qquad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

Matriz asociada a f respecto de la base B

$$F_B = \begin{pmatrix} f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_n}) \\ f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_n}) \end{pmatrix}$$

$$(F_B)_{ij} = \left(f(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j})\right)$$

Ejemplo 1: $\quad f: R^2 \times R^2 \to R, \qquad f\big((x, y), (x', y')\big) = xx' - xy' + 2yx' + 3yy'$

Base canónica: $\quad C = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} = \{(1,0), (0,1)\} \qquad ¿F_C?$

$$F_c = \begin{pmatrix} f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \\ f(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f((1,0),(1,0)) & f((1,0),(0,1)) \\ f((0,1),(1,0)) & f((0,1),(0,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f\big((1,0),(1,0)\big) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0$$

$$f\big((1,0),(0,1)\big) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1$$

$$f\big((0,1),(1,0)\big) = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0$$

$$f\big((0,1),(0,1)\big) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1$$

¡ATAJO! (R^n base canónica)

$$F_c = \begin{array}{cc|c} x' & y' & \\ 1 & -1 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}$$

$$f\big((x, y), (x', y')\big) = (x \quad y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Formas bilineales (IV). Matriz asociada: ejemplos.

$f: U \times U \to R$ **forma bilineal** $\quad B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ **base de** U

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \qquad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

Matriz asociada a f respecto de la base B

$$F_B = \begin{pmatrix} f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_n}) \\ f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_n}) \end{pmatrix}$$

$$(F_B)_{ij} = \left(f(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j})\right)$$

Ejemplo 2: $f: P_2(R) \times P_2(R) \to R, \qquad f(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$

Base canónica: $\qquad C = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\} = \{1, x, x^2\}$

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$F_C = \begin{pmatrix} f(p_0(x), p_0(x)) & f(p_0(x), p_1(x)) & f(p_0(x), p_2(x)) \\ f(p_1(x), p_0(x)) & f(p_1(x), p_1(x)) & f(p_1(x), p_2(x)) \\ f(p_2(x), p_0(x)) & f(p_2(x), p_1(x)) & f(p_2(x), p_2(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) & f(1,x^2) \\ f(x,1) & f(x,x) & f(x,x^2) \\ f(x^2,1) & f(x^2,x) & f(x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$f(1,1) = \int_0^1 1 \cdot 1 dt = t]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$f(x, x^2) = \int_0^1 t \cdot t^2 dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\bigg]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

Formas bilineales (IV). Matriz asociada: ejemplos.

$f: U \times U \to R$ **forma bilineal** $\quad B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ **base de** U

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \qquad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

Matriz asociada a f respecto de la base B

$$F_B = \begin{pmatrix} f(\vec{u_1}, \vec{u_1}) & f(\vec{u_1}, \vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_1}, \vec{u_n}) \\ f(\vec{u_2}, \vec{u_1}) & f(\vec{u_2}, \vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_2}, \vec{u_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\vec{u_n}, \vec{u_1}) & f(\vec{u_n}, \vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_n}, \vec{u_n}) \end{pmatrix}$$

$$(F_B)_{ij} = \left(f(\vec{u_i}, \vec{u_j})\right)$$

Ejemplo 2: $\quad f: P_2(R) \times P_2(R) \to R, \qquad f(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$

Base canónica: $\qquad C = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\} = \{1, x, x^2\}$

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$p(x) = 1 - x + x^2 \cong (1, -1, 1)_C$

$q(x) = 2 + x + 3x^2 \cong (2, 1, 3)_C$

$$f(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt = \int_0^1 (1 - t + t^2)(2 + t + 3t^2)dt = \int_0^1 (2 - t + 4t^2 - 2t^3 + 3t^4)dt = \cdots = \frac{44}{15}$$

$$f(p(x), q(x)) = (1 \quad -1 \quad 1)_c \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_c = (5/6 \quad 5/12 \quad 17/60) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{44}{15}$$

Formas bilineales (V). Cambio de base.

$f: U \times U \to R$ forma bilineal

$B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ base de U

$B' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ base de U

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \end{pmatrix}_{B'} F_{B'} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B = M_{BB'} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B = M_{BB'} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \end{pmatrix}_{B'} M^t_{BB'}$$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \end{pmatrix}_{B'} M^t_{BB'} F_B M_{BB'} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \end{pmatrix}_{B'} F_{B'} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\boxed{F_{B'} = M^t_{BB'} F_B M_{BB'}}$$

Formas bilineales (VI). Cambio de base. Ejemplo.

$f: U \times U \to R$ forma bilineal

$B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ base de U

$B' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ base de U

$$\boxed{F_{B'} = M^t_{BB'} F_B \, M_{BB'}}$$

Ejemplo 1: $f: R^2 \times R^2 \to R,$ $f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4x_2 y_2$

$B = \{(1, 2), (1, 1)\}$ ¿ F_B ?

$C = \{(1,0), (0,1)\}$

$$F_B = M^t_{CB} F_C \, M_{CB} \qquad M_{CB} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$$

¡ATAJO! (R^n base canónica)

$$F_c = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \end{array}$$

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F_B = \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}}$$

Formas bilineales simétricas y hemisimétricas.

Dada una **forma bilineal** en un espacio vectorial U, $f: U \times U \to R$

f es simétrica $\Leftrightarrow$ $f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u}),\quad \forall \vec{u},\vec{v} \in U$ $\Leftrightarrow$ F_B simétrica

f es antisimétrica ó hemisimétrica $\Leftrightarrow$ $f(\vec{u},\vec{v}) = -f(\vec{v},\vec{u}),\quad \forall \vec{u},\vec{v} \in U$ $\Leftrightarrow$ F_B antisimétrica ó hemisimétrica

f es simétrica $\Leftrightarrow$ $(F_B)_{ij} = \left(f(\vec{u_i},\vec{u_j})\right) = \left(f(\vec{u_j},\vec{u_i})\right) = (F_B)_{ji}$ $\Leftrightarrow$ $F_B = F_B^t$ $\Leftrightarrow$ F_B simétrica

f es antisimétrica ó hemisimétrica $\Leftrightarrow$ $(F_B)_{ij} = \left(f(\vec{u_i},\vec{u_j})\right) = \left(-f(\vec{u_j},\vec{u_i})\right) = -(F_B)_{ji}$ $\Leftrightarrow$ $F_B = -F_B^t$ $\Leftrightarrow$ F_B antisimétrica ó hemisimétrica

Matriz asociada a f respecto de la base B

$$F_B = \begin{pmatrix} f(\vec{u_1},\vec{u_1}) & f(\vec{u_1},\vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_1},\vec{u_n}) \\ f(\vec{u_2},\vec{u_1}) & f(\vec{u_2},\vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_2},\vec{u_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\vec{u_n},\vec{u_1}) & f(\vec{u_n},\vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_n},\vec{u_n}) \end{pmatrix}$$

$$(F_B)_{ij} = \left(f(\vec{u_i},\vec{u_j})\right)$$

Formas bilineales simétricas y hemisimétricas.

Dada una **forma bilineal** en un espacio vectorial U, $f: U \times U \to R$

f es simétrica $\Leftrightarrow$ $f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u}), \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in U$ $\Leftrightarrow$ F_B simétrica

f es antisimétrica ó hemisimétrica $\Leftrightarrow$ $f(\vec{u},\vec{v}) = -f(\vec{v},\vec{u}), \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in U$ $\Leftrightarrow$ F_B antisimétrica ó hemisimétrica

Ni son iguales (**no** simétrica).
Ni de distinto signo (**no** antisimétrica)

Ejemplo 1: $f: R^2 \times R^2 \to R$, $\quad f\big((x,y),(x',y')\big) = xx' - xy' + 2yx' + 3yy'$

$$F_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

NO simétrica

NO antisimétrica

$$f\big((1,0),(0,1)\big) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 = -1$$

$$f\big((0,1),(1,0)\big) = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 = 2$$

Ejemplo 2: $f: P_2(R) \times P_2(R) \to R$, $\quad f(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

F_C simétrica $\Leftrightarrow$ f simétrica

Otra forma de demostrar la simetría:

$$f(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt = \int_0^1 q(t)p(t)dt = f(q(x),p(x))$$