Álgebra Lineal II **Soluciones al Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **20 de Mayo de 2024**

1.– *Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor igual que 1 con coeficientes reales. Se define la forma bilineal:*

$$f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p(1)q(1) - p(2)q(2)$$

(i) *Probar que f es simétrica y hallar la matriz asociada a f en la base canónica.*

Una forma bilineal es simétrica si y sólo si la matriz asociada a la misma en cualquier base es simétrica. Así que comenzamos calculando la matriz asociada F_C, donde $C = \{1, x\}$ es la base canónica de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.Por definición se tiene:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) \\ f(x,1) & f(x,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \\ f(1,x) &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1 \\ f(x,1) &= 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1 \\ f(x,x) &= 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \end{aligned}$$

Como F_C es simétrica la forma bilineal es simétrica.

(ii) *Clasificar la forma cuadrática asociada a f indicando además su rango y signatura.*

Para clasificarla diagonalizamos por congruencia la matriz asociada:

$$F_C \xrightarrow{H_{12}} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1/3)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1/3)} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} = F_B$$

La signatura es $(1,1)$ y el rango 2. Se trata de una forma bilineal no degenerada e indefinida.

(iii) *Dar dos polinomios que formen una base de vectores conjugados.*

Una base B de vectores conjugados es aquella en la que la matriz asociada es diagonal. Como en el apartado anterior ya diagonalizamos la forma cuadrática basta hallar la base B asociada a esa diagonalización. Para ello sobre la identidad hacemos las mismas operaciones columna que hicimos en el proceso anterior y obtendremos M_{CB}:

$$Id \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1/3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$B = \{(0,1)_C, (1,-1/3)_C\} = \left\{x, 1 - \frac{x}{3}\right\}.$$

(iv) *Dar un polinomio autoconjugado.*

Vimos en el apartado (i) que $f(1,1) = 0$ y por tanto 1 es un polinomio autoconjugado.

(v) *¿Existe una base en la cuál la matriz asociada a f es la identidad?. Razona la respuesta.*

Dos matrices asociadas a una misma forma cuadrática son congruentes y por tanto tienen la misma signatura. Vimos que F_C tiene signatura $(1,1)$, pero la Id tiene signatura $(2,0)$. Por tanto Id no puedes estar asociada a esta forma cuadrática.

2.– *Sea espacio euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar cuya matriz de Gram en la base canónica es:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado el subespacio vectorial $U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,1),(1,2,1)\}$*:*

(i) *Calcular una base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$*.*

Una base ortonormal es aquella en la cual la matriz de Gram es la identidad. Entonces diagonalizaremos por congruencia la matriz de Gram dada y haciendo las mismas operaciones columna sobre la identidad llegaremos a M_{CB} siendo B la base ortonormal buscada.

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_B.$$

y

$$Id \overset{\mu_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto:

$$B = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$$

(ii) *Calcular una base ortonormal de* U*.*

Primero eliminamos los posibles vectores dependientes entres sus generadores, mediante operaciones elementales fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(0,1,0)\}.$$

Para hallar una base ortonormal de U primero aplicamos Gram-Schmdit para obtener una base ortogonal.

El primer vector es el mismo que tenemos $u_1 = (1,0,1)$.

El segundo:

$$u_2 = (0,1,0) + a(1,0,1)$$

Imponemos que sean perpendiculares:

$$u_1 \cdot u_2 = 0 \iff (1,0,1)\cdot(0,1,0) + a(1,0,1)\cdot(1,0,1) = 0$$

de donde:

$$a = -\frac{(1,0,1)\cdot(0,1,0)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)} = -\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}$$

Queda:

$$u_2 = (0,1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) = (1/2, 1, 1/2)$$

Ahora normalizamos los vectores dividiéndolos por su norma:

$$\|u_1\| = \|(0,1,0)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$\|u_2\| = \|(1/2,1,1/2)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}} = \sqrt{3/2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

La base pedida es:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1/2}{\sqrt{6}/2}, \frac{1}{\sqrt{6}/2}, \frac{1/2}{\sqrt{6}/2} \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right\}$$

(iii) *Calcular la matriz P_C asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre U respecto de la base canónica.*

Construimos una base auxiliar $B' = \{\underbrace{w_1, w_2}_{U}, \underbrace{w_3}_{U^\perp}\}$ donde $w_1 = (1,0,1)$, $w_2 = (0,1,0)$ y w_3 ha de ser perpendicular a los dos anteriores. Si llamamos $w_3 = (x,y,z)$ tiene que cumplir:

$$\begin{cases} (x,y,z)^t G_C (1,0,1) = 0 \\ (x,y,z)^t G_C (0,1,0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \iff$$

De donde:

$$x = 2y, \quad z = y - x = -y.$$

Tomamos $w_3 = (2,1,-1)$ y la base auxiliar queda:

$$B' = \{(1,0,1),(0,1,0),(2,1,-1)\}$$

En tal base la matriz de la proyección es:

$$P_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y finalmente:

$$P_C = M_{CB'} P_{B'} M_{CB'}^{-1}$$

donde

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_{CB'}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operando resulta:

$$P_C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(iv) *Calcular la proyección ortogonal del vector $(3,3,6)$ sobre U.*

Basta usar la matriz calculada en el apartado anterior:

$$P_C \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(v) *¿Qué reprenta la matriz $Id - P_C$?. Razona la respuesta.*

Sabemos que todo vector $w \in \mathbb{R}^3$ se descompone de manera única como:

$$w = w_1 + w_2 \text{ con } w_1 \in U, \quad w_2 \in U^\perp.$$

donde $w_1 = P_C w$. Por tanto:

$$(Id - P_C)w = w - w_1 = w_2$$

Es decir $Id - P_C$ al ser multiplicada por un vector devuelve su proyección ortononal sobre $U^\perp$, es decir, sobre la recta perpendicular a U. Es entonces la matriz asociada a la proyección ortogonal sobre $U^\perp$.

3.– *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ se considera la aplicación lineal $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada respecto a la base canónica:*

$$T_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(i) *Estudiar para que valores de a y b, t es una transformación ortogonal.*

Dado que trabajamos con el producto escalar usual y respecto a la base canónica, es una transformación ortogonal si y sólo si:

$$T_C T_C^t = Id \quad \iff \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$a^2 + b^2 = 1, \qquad 2ab = 0.$$

Entonces:

- O bien $a = 0$ y $b^2 = 1$ es decir $b = \pm 1$.

- O bien $b = 0$ y $a^2 = 1$ es decir $a = \pm 1$.

Y son los cuatro casos en los que la transformación es ortogonal.

(ii) *Para cada uno de los casos anteriores clasificarla y describirla geométricamente.*

Recordemos que sólo hay dos posiblidades. Si $det(T_C) = 1$ es un giro y si $det(T_C) = -1$ es una simetría respecto a una recta. En nuestro caso:

$$det(T_C) = a^2 - b^2$$

Entonces:

- Caso I. $a = 0, b = 1$. $det(T_C) = -1$. Es una simetría respecto a una recta. El eje de simetría está generado por el autovector asociado al 1:

$$(T_C - 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0.$$

Deducimos que es una simetría respecto a la recta $x - y = 0$ o equivalentemente la recta $\mathcal{L}\{(1,1)\}$.

- Caso II. $a = 0, b = -1$. $det(T_C) = -1$. Es una simetría respecto a una recta. El eje de simetría está generado por el autovector asociado al 1:

$$(T_C - 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0.$$

Deducimos que es una simetría respecto a la recta $x + y = 0$ o equivalentemente la recta $\mathcal{L}\{(1,-1)\}$.

- Caso III. $a = 1, b = 0$. $det(T_C) = 1$. Es un giro. De hecho la matriz es:

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

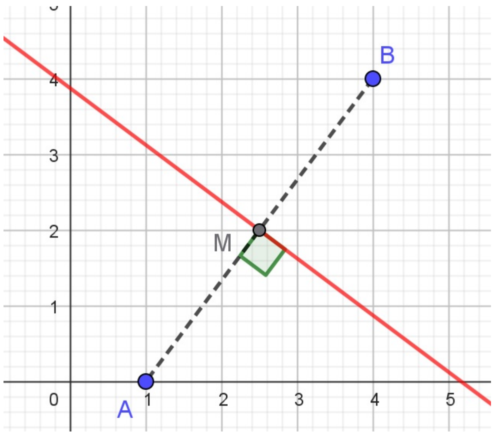
Por tanto es un giro de cero grados.

- Caso IV. $a = -1, b = 0$. $det(T_C) = 1$. Es un giro. De hecho la matriz es:

$$T_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$$

Por tanto es un giro de 180 grados (o equivalentemente una simetría respecto al origen).

4.– *En el plano afín euclídeo* $\mathbb{R}^2$ *dar las ecuaciones de una simetría que lleve el punto* $(1,0)$ *en el* $(4,4)$



El punto medio M del original $A = (1,0)$ y su simétrico $B = (4,4)$ tiene que pertenecer al eje de simetría:

$$M = \frac{A+B}{2} = (5/2, 2)$$

Además el vector que une ambos puntos ha de ser perpendicular al eje, luego el eje lo tiene por vector normal $n = \vec{AB} = B - A = (3,4)$.

Por tanto el eje de simetría es que tiene por vector normal $(3,4)$ y pasa por $M = (5/2, 2)$. Las ecuaciones de la simetría son de la forma:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x - 5/2 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

donde T_C es la matriz de la simetría.

Para construirla consideramos una base $B = \{u, n\}$ auxiliar donde u es el vector director de la recta y n un vector perpendicular a ella (el vector normal por ejemplo). Como $n = (3,4)$ podemos tomar $u = (4, -3)$ y así:

$$B = \{(4,-3), (3,4)\}.$$

Sabemos que:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

y

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_{CB}^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$T_C = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$$

y finalmente la ecuaciones de la simetría son:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 5/2 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

5.– *En el espacio afín* $\mathbb{R}^3$ *se consideran las rectas* r, s *de ecuaciones:*

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

(i) *Hallar la ecuación de una recta que corte a* r *y a* s *y pase por el origen.*

La recta pedida pertence al plano que contiene al origen $O = (0,0,0)$ y la recta r y también al plano que contiene al origen $O = (0,0,0)$ y la recta s. La calcularemos entonces como intersección de ambos planos.

La recta r pasa por el punto $R = (1,1,0)$ y tiene como vector director $u = (1,1,1)$. El plano que la contiene junto al origen $(0,0,0)$ tiene como vectores directores $u = (1,1,1)$ y $OR = (1,1,0) - (0,0,0) = (1,1,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y = 0.$$

La recta s está dada como intersección de dos planos. Cualquier plano que la contenga está contenida en el haz de planos que generan:

$$\lambda(x+y-1) + x+y+z = 0$$

Imponiendo que pase por el origen queda:

$$\lambda(-1) + 0 = 0$$

de donde $\lambda = 0$ y el plano es:

$$x+y+z=0$$

En definitiva la recta pedida es:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

O pasando a paramétricas:

$$y = x, \quad z = -2x$$

es decir:

$$x = t, \qquad y = t, \qquad z = -2t.$$

(ii) *Hallar el ángulo que forman* r, s *y la distancia entre ellas.*

El ángulo es el que forman sus vectores directores. Pasamos las ecuaciones de s de implícitas a paramétricas resolviendo el sistema que forman:

$$s \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Restándolas se obtiene $z = -1$ y de la primera ecuación $y = 1 - x$. Por tanto las paramétricas quedan:

$$x = t, \quad y = 1-t, \quad z = -1$$

Deducimos que s pasa por el punto $S = (0,1,-1)$ y tiene por vector director $v = (1,-1,0)$.

El ángulo entre las rectas es:

$$\angle(r,s) = \angle(u,v) = arcos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right) = arcos\left(\frac{(1,1,1)\cdot(1,-1,0)}{\|(1,1,1)\|\|(1,-1,0)\|}\right) = arcos(0) = 90^o$$

Para la distancia usamos la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|[SR,u,v]|}{\|u\times v\|}$$

donde $SR = T - s = (1,0,1)$ y

$$[SR,u,v] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

y

$$u\times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = e_1 + e_2 - 2e_3 = (1,1,-2)$$

La distancia queda:

$$d(r,s) = \frac{1}{\|(1,1,-2)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

6.– *Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:*

(a) *Si* $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es una forma cuadrática, todo vector del núcleo de* w *es autoconjugado.*

VERDADERO. Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w, que u esté en el núcleo de w significa que $f(u,v) = 0$ para todo vector $v \in \mathbb{R}^2$. En particular para $v = u$, $0 = f(u,u) = w(u)$ y por tanto u es autoconjugado.

(b) *Si* T_C *es la matriz asociada a una transformación ortogonal en el espacio y traza*$(T_C) = 0$ *entonces es un giro.*

FALSO. Por ejemplo la matriz:

$$T_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(60^o) & -sin(60^o) \\ 0 & sin(60^o) & cos(60^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

tiene traza cero y es la matriz de un giro de 60^o compuesta con una simetría respecto a un plano.

(c) *En el espacio* $\mathbb{R}^3$*, la composición de* 20 *simetrías respecto a una recta con* 25 *giros es una giro.*

VERDADERO. La composición de transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal. Además en el espacio toda transformación ortogonal es o bien un giro, si su matriz asociada tiene determinante $+1$ o giro compuesto con simetría si el determinante es -1.

Pero en $\mathbb{R}^3$ una simetría respecto a una recta equivale a un giro de 180^o respecto al eje de simetrí a, es decir, a un giro. Por tanto en realidad estamos componiendo $20 + 25 = 45$ giros.

Dado que la matriz de la composición es el producto de las matrices asociadas de las transformaciones que componemos y que el determinante de la matriz producto es el producto de determinantes, el determinante de la matriz de la composición descrita en el enunciado es:

$$(1)^{45} = +1$$

y por tanto se trata de un giro.

7.– *En el plano afín y para cada $k \in \mathbb{R}$ se define la cónica de ecuación:*

$$x^2 + 2kxy + 4y^2 + 2ky = 0$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.*

Clasificamos la cónica en función de los signos de los determinantes de la matriz asociada y de la matriz de términos cuadráticos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 4 & k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$det(A) = -k^2, \quad det(T) = 4 - k^2$$

Los determinantes se anulan cuando $k = 0$ (el de A) y cuando $k = \pm 2$ (el de T). Son los valores donde es susceptible un punto de cambio de signo y nos sirven para organizar la clasificación:

k	$\|T\|$	$\|A\|$	TIPO DE CÓNICA
$k < -2$	$-$	$-$	Hipérbola.
$k = -2$	0	$-$	Parábola.
$-2 < k < 0$	$+$	$-$	Elipse.
$k = 0$	$+$	0	Rectas secantes imaginarias cortándose en punto real.
$0 < k < 2$	$+$	$-$	Elipse.
$k = 2$	0	$-$	Parábola.
$k > 2$	$-$	$-$	Hipérbola.

(ii) *Para $k = 2$ hallar la ecuación reducida, la excentricidad y la distancia de un foco a su vértice más cercano. Hallar también las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(-1/2, 0)$.*

Para $k = 2$ vimos que se trata de una parábola y por tanto la excentricidad es 1. La eucación reducida es de la forma $\lambda_1 x'^2 - 2dy' = 0$ donde λ_1 es el autovalor no nulo de T y $d = \sqrt{-|A|/\lambda_1}$.

Como el otro autovalor de T es cero (porque $|T| = 0$) y la suma de autovalores coincide con la traza, $\lambda_1 = traza(T) = 5$ y $d = \sqrt{4/5} = 2\sqrt{5}/5$. La ecuación reducida queda:

$$5x'^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} y' = 0.$$

Se sabe que la distancia del único vértice de la parábola a su único foco es $p/2$ cuando la ecuación reducida se escribe en la forma $x'^2 - 2py' = 0$:

$$5x'^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x'^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{25} y' = 0$$

Por tanto $p = \dfrac{2\sqrt{5}}{25}$ y la distancia de vértice a foco es:

$$d(F, V) = \frac{\sqrt{5}}{25}$$

Para hallar las tangentes a la parábola desde el punto $P = (-1/2, 0)$, calcularemos la recta polar del punto P. Sabemos que ésta corta a la parábola en dos puntos N, M que corresponden a los puntos de tangencia de las tangentes a la parábola por P, de manera que las rectas buscadas serán PN y PM.

La recta polar es:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -\frac{x}{2} + y = 0 \iff x - 2y = 0$$

La intersecamos con la cónica:
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

Despejando x en la primera ecuación obtenemos $x = 2y$; sustituyendo en la segunda:

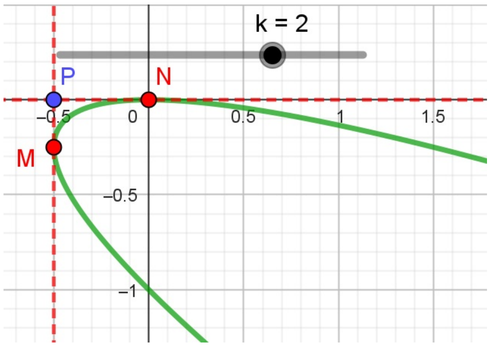
$$4y^2 + 8y^2 + 4y^2 + 4y = 0 \iff 4y^2 + y = 0 \iff y = 0 \text{ ó } y = -1/4.$$

Por tanto los puntos de corte son $N = (0, 0)$ y $M = (-1/2, -1/4)$.

Las tangentes pedidas son:

- Recta que une $P = (-1/2, 0)$ y $N = (0, 0)$: $y = 0$.

- Recta que une $P = (-1/2, 0)$ y $M = (-1/2, -1/4)$: $x = -1/2$.



(iii) *Hallar k para que la cónica sea no degenerada y tenga el centro sobre la recta $x - y = 0$.*

Si el centro es el punto (r, s), pertenece a la recta $x - y = 0$ cuando $r - s = 0$, es decir, $r = s$. Por otra parte el centro cumple la ecuación:

$$A \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \qquad h \text{ cualquier valor}$$

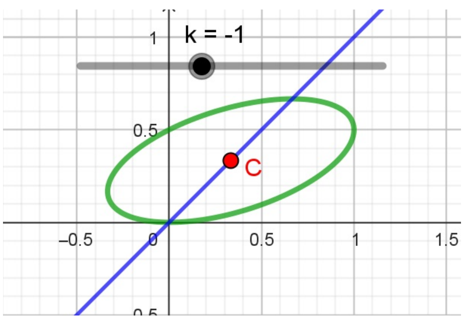
Operando y usando que $r = s$ queda:

$$\begin{aligned} r + kr &= 0 \\ kr + 4r + k &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación $r(1 + k) = 0$ y por tanto:

- O bien $r = 0$ y en ese caso en la segunda ecuación $k = 0$. Pero este caso lo descartamos porque vimos que para $k = 0$ la cónica es degenerada y nos piden una NO degenerada.

- O bien $k = -1$ y en ese caso en la segunda ecuación $3r - 1 = 0$. Concluimos que el valor pedido es $k = -1$ y el centro estaría en el punto $(1/3, 1/3)$.



8.– *Hallar la ecuación de una cónica no degenerada sabiendo que pasa por los puntos $P(1,0)$, $Q(3,2)$, $R(7,2)$, es tangente al eje OX y no tiene centro.*

Si la cónica es no degenerada y sin centro necesariamente es una parábola.

El eje OX pasa por el punto $P(1,0)$. Por tanto conocemos tres puntos P, Q, R y la tangente Tg_P en uno de ellos. Formaremos el haz de cónicas bajo estas condiciones. Después impondremos que la cónica buscada es una parábola y por tanto $|T| = 0$ y $|A| \neq 0$.

El haz se genera con la cónicas:

- Recta $Tg_P = eje_{OX}$ y recta PQ. La recta PQ es la recta $y = 2$ porque ambos puntos tienen la misma ordenada 2. La cónica es el producto de ambas rectas $y(y-2) = 0$.

- Rectas PQ y PR. La recta que une $P = (1,0)$ y $Q = (3,2)$ es:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{2-0} \iff x - y - 1 = 0$$

Y la recta que une $P = (1,0)$ y $R = (7,2)$:

$$\frac{x-1}{7-1} = \frac{y-0}{2-0} \iff x - 3y - 1 = 0$$

La segunda cónica para generar el haz es el producto de ambas rectas $(x-y-1)(x-3y-1) = 0$.

El haz queda:

$$\lambda y(y-2) + (x-y-1)(x-3y-1) = 0$$

Desarrollando:

$$x^2 - 4xy + (3+\lambda)y^2 - 2x + (4-2\lambda)y + 1 = 0.$$

La matriz de términos cuadráticos es:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3+\lambda \end{pmatrix}$$

Imponemos que su determinante sea nulo:

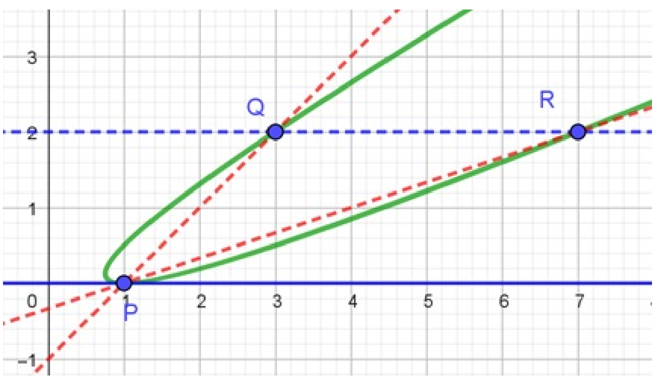
$$|T| = 0 \iff 3 + \lambda - 4 = 0 \iff \lambda = 1.$$

La cónica queda:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

Comprobamos por último que $|A| \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad |A| = -1.$$



9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xy - 4xz - 2yz + 2x = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para clasificar la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, multiplicada por un número o sumada a las demás:

$$A \xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{21}(1)}\xrightarrow{H_{31}(2)}\xrightarrow{\mu_{21}(1)}\xrightarrow{\mu_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-1)}\xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{43}(1/3)}\xrightarrow{\mu_{43}(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura queda $(+, +, -; +)$ y así se trata de un hiperboloide de dos hojas.