Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **20 de Mayo de 2025**

1.– Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor igual que 1 con coeficientes reales. Se define la forma bilineal:

$$f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p(1)q(1) - p(2)q(2)$$

(i) Probar que f es simétrica y hallar la matriz asociada a f en la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática asociada a f indicando además su rango y signatura.

(iii) Dar dos polinomios que formen una base de vectores conjugados.

(iv) Dar un polinomio autoconjugado.

(v) ¿Existe una base en la cuál la matriz asociada a f es la identidad?. Razona la respuesta.

(1.2 puntos)

2.– Sea espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar cuya matriz de Gram en la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado el subespacio vectorial $U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,1),(1,2,1)\}$:

(i) Calcular una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Calcular una base ortonormal de U.

(iii) Calcular la matriz P_C asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre U respecto de la base canónica.

(iv) Calcular la proyección ortogonal del vector $(3,3,6)$ sobre U.

(v) ¿Qué representa la matriz $Id - P_C$?. Razona la respuesta.

(1.5 puntos)

3.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ se considera la aplicación lineal $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con matriz asociada respecto a la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar para que valores de a y b, t es una transformación ortogonal.

(ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificarla y describirla geométricamente.

(1.3 puntos)

4.– En el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ dar las ecuaciones de una simetría que lleve el punto $(1,0)$ en el $(4,4)$

(1 punto)

5.– En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas r, s de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

(i) Hallar la ecuación de una recta que corte a r y a s y pase por el origen.

(ii) Hallar el ángulo que forman r, s y la distancia entre ellas.

(1 punto)

6.– Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:

(a) Si $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una forma cuadrática, todo vector del núcleo de w es autoconjugado.

(b) Si T_C es la matriz asociada a una transformación ortogonal en el espacio y $traza(T_C) = 0$ entonces es un giro.

(c) En el espacio $\mathbb{R}^3$, la composición de 20 simetrías respecto a una recta con 25 giros es una giro.

(0.9 puntos)

7.– En el plano afín y para cada $k \in \mathbb{R}$ se definela cónica de ecuación:

$$x^2 + 2kxy + 4y^2 + 2ky = 0$$

(i) Clasificar la cónica en función de los valores de k.

(ii) Para $k = 2$ hallar la ecuación reducida, la excentricidad y la distancia de un foco a su vértice más cercano. Hallar también las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(-1/2, 0)$.

(iii) Hallar k para que la cónica sea no degenerada y tenga el centro sobre la recta $x - y = 0$.

(1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una cónica no degenerada sabiendo que pasa por los puntos $P(1,0), Q(3,2), R(7,2)$, es tangente al eje OX y no tiene centro.

(1 punto)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xy - 4xz - 2yz + 2x = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II **Exame Final**

Exercicio único (3 horas.) **20 de maio 2024**

1.– Sexa $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de polinomios de grao menor ou igual que 1 con coeficientes reais. Defínese a forma bilinear:

$$f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p(1)q(1) - p(2)q(2)$$

(i) Probar que f é simétrica e atopar a matriz asociada a f na base canónica.

(ii) Clasificar a forma cuadrática asociada a f indicando ademais o seu rango e sinatura.

(iii) Dar dous polinomios que formen unha base de vectores conxugados.

(iv) Dar un polinomio autoconxugado.

(v) Existe unha base na cal a matriz asociada a f é a identidade? Razoa a resposta.

(1.2 puntos)

2.– Sexa o espazo euclídeo $\mathbb{R}^3$ cun produto escalar de matriz de Gram na base canónica:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado o subespazo vectorial $U = \mathcal{L}\{(1,0,1), (1,1,1), (1,2,1)\}$:

(i) Calcular unha base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Calcular unha base ortonormal de U.

(iii) Calcular a matriz P_C asociada á aplicación proxección ortogonal sobre U respecto da base canónica.

(iv) Calcular a proxección ortogonal do vector $(3,3,6)$ sobre U.

(v) Que representa a matriz $Id - P_C$? Razoa a resposta.

(1.5 puntos)

3.– No espazo euclídeo $\mathbb{R}^2$ considérase a aplicación lineal $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con matriz asociada respecto á base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(i) Estudar para que valores de a e b, t é unha transformación ortogonal.

(ii) Para cada un dos casos anteriores clasifícaa e descríbea xeométricamente.

(1.3 puntos)

4.– No plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ dar as ecuacións dunha simetría que leve o punto $(1,0)$ ao $(4,4)$

(1 punto)

5.– No espazo afín $\mathbb{R}^3$ considéranse as rectas r, s de ecuacións:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

(i) Atopar a ecuación dunha recta que corte a r e a s e pase pola orixe.

(ii) Atopar o ángulo que forman r, s e a distancia entre elas.

(1 punto)

6.– Razoa a veracidade ou falsidade das seguintes cuestións:

(a) Se $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é unha forma cuadrática, todo vector do núcleo de w é autoconxugado.

(b) Se T_C é a matriz asociada a unha transformación ortogonal no espazo e $traza(T_C) = 0$ entón é un xiro.

(c) No espazo $\mathbb{R}^3$, a composición de 20 simetrías respecto a unha recta con 25 xiros é un xiro.

(0.9 puntos)

7.– No plano afín e para cada $k \in \mathbb{R}$ defínese a cónica de ecuación:

$$x^2 + 2kxy + 4y^2 + 2ky = 0$$

(i) Clasificar a cónica en función dos valores de k.

(ii) Para $k = 2$ atopar a ecuación reducida, a excentricidade e a distancia dun foco ao seu vértice mais próximo. Atopar tamén as rectas tanxentes á cónica que pasan polo punto $(-1/2, 0)$.

(iii) Atopar k para que a cónica sexa non dexenerada e teña o centro sobre a recta $x - y = 0$.

(1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha cónica non dexenerada sabendo que pasa polos puntos $P(1,0), Q(3,2), R(7,2)$, é tanxente ó eixo OX e non ten centro.

(1 punto)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xy - 4xz - 2yz + 2x = 0.$$

clasificar a superficie e debuxar un bosquexo da mesma.

(0.6 puntos)
