Ecuación de una cónica a partir de ciertos datos.

I. Observaciones generales:

1. El centro o un eje pueden servir para duplicar la información por simetría. **Ej. 11d., 11f., 12, 15, 16, XIII**.
2. Si se conoce un vértice puede ser útil tener en cuenta que el eje es perpendicular a la tangente en él. **Ej. 11g, 11i, 12, 14.**
3. Si se conocen dos focos lo más cómodo suele ser usar la descripción de la cónica como lugar geométrico. **Ej. 11c. 17. 18. XI.**
4. Si se conoce foco y directriz asociada será útil usar su definición, es decir, que el cociente de distancias de un punto al foco y la directriz es una constante igual a la excentricidad.
5. Si se sabe que es una parábola el determinante de la matriz de términos cuadráticos es nulo $|T| = 0$. **Ej. 11e,11i, XIII.**

II. Método (1): Hallar directamente su matriz asociada A.

Sabemos que la matriz asociada a una cónica es una matriz simétrica. Por tanto depende de 6 parámetros:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Se trata ahora de ir utilizando los datos conocidos sobre la cónica para imponer condiciones sobre esa matriz e ir obteniendo ecuaciones que nos permitan calcular por completo sus coeficientes. Dado que ecuaciones proporcionales definen el mismo objeto geométrico, será suficiente si logramos poner cinco de las variables como múltiplo de otra, pudiendo entonces dividir por esta última. Es decir en general bastará conseguir cinco ecuaciones independientes.

Los datos más comunes que conoceremos y su traducción a ecuaciones que realacionan los coeficientes de la matriz son lo siguientes:

1. Un punto (x_0, y_0) de la cónica. Imponemos entonces que $(x_0, y_0, 1)A(x_0, y_0, 1)^t = 0$ y obtenemos UNA ecuación. **Ej. 11e**.
2. Conocemos el centro (x_0, y_0) de la cónica. Imponemos entonces que $(x_0, y_0, 1)A = (0, 0, h)$ y obtenemos DOS ecuaciones. **Ej. 11b**.
3. Conocemos una tangente $px + qy + r = 0$ y el punto de tangencia (x_0, y_0). Imponemos que la tangente en el punto indicado sea la dada:

   $$(x_0, y_0, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \quad \equiv \quad px + qr + r = 0.$$

   Es importante tener en cuenta que se usará que dos ecuaciones definen la misma recta si sus coeficientes son proporcionales. Se obtienen DOS ecuaciones. **Ej. XIV**.
4. Conocemos una tangente $px + qy + r = 0$ pero NO el punto de tangencia. Imponemos que la intersección de la tangente y la cónica tenga un única solución. Es decir que el discriminante de la ecuación de segundo grado que se obtiene combinando la ecuación de la recta y de la cónica sea cero. Se obtiene UNA ecuación **Ej. XIV**.
5. Conocemos la recta polar $px + qy + r = 0$ de un punto (x_0, y_0). Imponemos que polar el punto indicado sea la dada:

   $$(x_0, y_0, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \quad \equiv \quad px + qr + r = 0.$$

   De nuevo se usará que dos ecuaciones definen la misma recta si sus coeficientes son proporcionales. Se obtienen DOS ecuaciones. **Ej. 11b,11e,11i**.
6. Conocemos un eje $px + qy + r = 0$. Se usa que el eje es la recta polar de su vector normal:

   $$(p, q, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \quad \equiv \quad px + qr + r = 0.$$

   De nuevo se usará que dos ecuaciones definen la misma recta si sus coeficientes son proporcionales. Se obtienen DOS ecuaciones. **Ej. 11b**.
7. Conocemos una asíntota $px + qy + r = 0$. Se usa que es la tangente en su punto del infinito (el dado por su vector director):

   $$(q, -p, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \quad \equiv \quad px + qr + r = 0.$$

   De nuevo se usará que dos ecuaciones definen la misma recta si sus coeficientes son proporcionales. Se obtienen DOS ecuaciones. **Ej. VIII**

II. Método (2): Haces de cónicas .

La idea es utilizar todas los datos que conocemos menos uno, para hallar un haz de cónicas que permita escribir la ecuación de la cónica en función de una sóla incógnita (o dos parámetros proporcionales).

Para generar el haz se necesitan dos cónicas cumpliendo todas las condiciones (menos una) del enunciado. Normalmente (aunque no siempre) se buscarán cónicas formadas por pares de rectas.

La condición que no hemos usado para el haz se utiliza para hallar el valor de la incógnita restante. Tal condición se aplica siguiendo las mismas indicaciones que hemos visto en el Método (1)).

Los haces más típicos son:

1. Haz por cuatro puntos.
2. Haz conocidos dos puntos, una tangente y el punto de tangencia.
3. Haz conocidas dos tangentes y puntos de tangencia **Ej. 11e, 11g, 16, XIV.**.
4. Haz conocida una asíntota, una tangente y el punto de tangencia **Ej. IX**.
5. Haz conocidas dos asíntotas **Ej. 11d, VIII**.
6. Haces especiales adaptados a los datos del problema **Ej. 8iv, V**.