4. Endomorfismos.

1 Introducción.

Vimos en el capítulo anterior que un **endomorfismo es una aplicación lineal donde el espacio vectorial inicial y final coinciden** $t : U \longrightarrow U$. Si fijamos una base en U:

$$B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\},$$

podemos trabajar con la matriz asociada a la aplicación t con respecto a esta base:

$$t(\bar{u}_i) = t^i_j \bar{u}_i, \qquad \Rightarrow \qquad T_{BB} = (t^i_j).$$

En este caso la matriz T_{BB} es la **matriz del endomorfismo** t **respecto a la base** B. A veces la denotaremos simplemente como la matriz T_B.

Si tenemos otra base en U:

$$B' = \{\bar{u}'_1, \ldots, \bar{u}'_n\}$$

y consideramos la matriz de paso $M_{B'B}$ hemos visto como se relacionan las matrices asociadas a t respecto a estas dos bases:

$$T_{B'B'} = M_{B'B} T_{BB} M_{BB'} = (M_{BB'})^{-1} T_{BB} M_{B'B}$$

Deducimos un primer resultado interesante:

Proposición 1.1 *Dos matrices están asociadas a un mismo endomorfismo si y sólo si son semejantes.*

Si llamamos $End(U)$ al espacio vectorial $Hom(U, U)$ de endomorfimos de U, ya vimos en el capítulo anterior que, fiajada una base B, la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & End(U) & \longrightarrow & M_{n\times n} \\ & t & \longrightarrow & T_B \end{array}$$

es un isomorfismo. Por tanto el estudio de endomorfismos es equivalente al estudio de matrices cuadradas y su relación de semejanza.

Uno de los objetivos fundamentales de este tema, será encontrar bases en las que la matriz asociada a un endomorfismo dado sea lo más sencilla posible. Equivalentente, dada una matriz cuadrada encontrar una matriz semejante lo más sencilla posible.

2 Autovalores y autovectores.

2.1 Definición y propiedades.

Definición 2.1 *Dado un endomorfismo $t : U \longrightarrow U$, se dice que λ es un* **autovalor** *de t cuando existe un vector $\bar{x}$ no nulo tal que:*

$$t(\bar{x}) = \lambda \bar{x}.$$

El escalar λ cumpliendo esta condición se llama también **valor propio** *o* **valor característico***; los vectores $\bar{x}$ verificando esta condición se llaman* **autovectores** *o* **vectores propios o vectores característicos** *asociados a λ.*

Veamos algunas consideraciones derivadas de esta definición:

1. *Si $\lambda = 0$ es un autovalor de t, entonces los autovectores asociados a él son los vectores del núcleo de t.*

2. *Un autovector $\bar{x} \neq 0$ no puede estar asociado a dos autovalores distintos.*

   Prueba: Si $\bar{x}$ está asociado a dos autovalores distintos λ, μ se tiene:

   $$\lambda\bar{x} = t(\bar{x}) = \mu\bar{x} \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)\bar{x} = 0.$$

   Como $\bar{x} \neq \bar{0}$, deducimos que $\lambda - \mu = 0$ y por tanto ambos valores son iguales.

3. **Fijada una base B en U la expresión matricial de la condición de autovalor es:**

   $$t(\bar{x}) = \lambda\bar{x} \iff T_B(x) = \lambda(x).$$

   Esto nos permite hablar de autovalores y autovectores de una matriz cuadrada.

4. *Dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores.*

   Prueba: Vimos que dos matrices semejantes son matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto a bases diferentes. Ahora bien, los autovalores de una matriz son los del endomorfismo asociado y estos no dependen de la base en la que estamos trabajando (de hecho para introducirlos no hace falta trabajar con bases). ■

2.2 Subespacios característicos.

Definición 2.2 *El conjunto de autovectores asociado a un autovalor λ se denotará por S_λ y se llama* **subespacio característico** *o* **subespacio propio asociado a** λ*:*

$$S_\lambda = \{\bar{x} \in U |\, t(\bar{x}) = \lambda\bar{x}\}.$$

Proposición 2.3 *El conjunto S_λ de autovectores asociado a un autovalor λ es un subespacio vectorial.*

Prueba: En primer lugar $S_\lambda \neq \emptyset$ porque $\bar{0} \in S_\lambda$. Además dados $\bar{x}, \bar{y} \in S_\lambda$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rcl} t(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha t(\bar{x}) + \beta t(\bar{y}) & = & \alpha\lambda\bar{x} + \beta\lambda\bar{y} = \lambda(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \\ & \uparrow & \\ \bar{x}, \bar{y} \in S_\lambda \iff t(\bar{x}) = \lambda\bar{x}, & & t(\bar{y}) = \lambda\bar{y} \end{array}$$

y por tanto $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in S_\lambda$. ■

Observación 2.4 *Otra forma de probar el resultado anterior es la siguiente. Dado un endomorfismo t y un autovalor λ , definimos la aplicación*

$$t' : U \longrightarrow U; \qquad t'(\bar{x}) = t(\bar{x}) - \lambda\bar{x} \iff t' = t - \lambda Id.$$

Esta aplicación es lineal por ser diferencia de aplicaciones lineales. Además:

$$S_\lambda = \{\bar{x} \in U |\, t(\bar{x}) = \lambda\bar{x}\} = \{\bar{x} \in U |\, t(\bar{x}) - \lambda\bar{x} = \bar{0}\} = ker(t - \lambda Id).$$

Vemos que:

$$\boxed{S_\lambda = ker(t - \lambda Id)}$$

es un subespacio vectorial por ser el núcleo de una aplicación lineal.

Proposición 2.5 *Si* λ_1 *y* λ_2 *son autovalores distintos de un endomorfismo entonces* $S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} = \{\bar{0}\}$.

Equivalentemente, la suma $S_{\lambda_1} + S_{\lambda_2}$ *es una suma directa.*

Prueba: Es consecuencia de que un autovector no nulo no está asociado a autovalores distintos. ■

Proposición 2.6 *Si* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *son autovalores distintos de un endomorfismo entonces* $(S_{\lambda_1} + \ldots + S_{\lambda_i}) \cap S_{\lambda_{i+1}} = \{0\}$ *para* $i = 1, \ldots, k-1$.

Equivalentemente, la suma $S_{\lambda_1} + \ldots + S_{\lambda_k}$ *es una suma directa.*

Prueba: Lo probamos por inducción. Cuando sólo hay dos subespacios hemos visto que es cierto.

Supongamos que es cierto para i subespcios característicos y comprobémoslo para $i+1$.

Sea $\bar{x} \in (S_{\lambda_1} + \ldots + S_{\lambda_i}) \cap S_{\lambda_{i+1}}$. Entonces se tiene:

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_i, \qquad \text{con} \quad x_j \in S_{\lambda_j}, \quad j = 1, \ldots, i.$$

Aplicando t tenemos:

$$t(\bar{x}) = t(\bar{x}_1) + \ldots + t(\bar{x}_i) = \lambda_1 \bar{x}_1 + \ldots + \lambda_i \bar{x}_i.$$

Por otra parte como $\bar{x} \in S_{\lambda_{i+1}}$, se tiene:

$$t(\bar{x}) = \lambda_{i+1}\bar{x} = \lambda_{i+1}\bar{x}_1 + \ldots + \lambda_{i+1}\bar{x}_i.$$

Comparando ambas expresiones:

$$(\lambda_1 - \lambda_{i+1})\bar{x}_1 + \ldots + (\lambda_i - \lambda_{i+1})\bar{x}_i = \bar{0}$$

Como $S_{\lambda_1}, \ldots, S_{\lambda_i}$ es una suma directa, la descomposición de $\bar{0}$ como suma de elementos de $S_{\lambda_1} \ldots, S_{\lambda_i}$ es única. Por tanto:

$$(\lambda_1 - \lambda_{i+1})\bar{x}_1 = \ldots = (\lambda_i - \lambda_{i+1})\bar{x}_i = \bar{0}$$

Dado que todos los autovalores son distintos, $\bar{x}_1 = \ldots = \bar{x}_i = \bar{0}$ y $\bar{x} = \bar{0}$. ■

2.3 Polinomio característico.

Definición 2.7 *Sea* $t : U \longrightarrow U$ *un endomorfismo,* B *una base de* t *y* T *la matriz asociada a* t *con respecto a esta base. El* **polinomio característico** *de* t *es:*

$$p_t(\lambda) = det(T - \lambda Id).$$

Proposición 2.8 *El polinomio característico de un endomorfismo no depende de la base escogida.*

Prueba: Supongamos que T y T' son dos matrices asociadas a un endomorfismo $t : U \longrightarrow U$, respecto a bases diferentes. Entonces sabemos que T y T' son semejantes, es decir, existe una matriz regular P verificando que $T' = P^{-1}TP$. Ahora:

$$|T' - \lambda I| = |P^{-1}TP - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(T - \lambda I)P| = |P^{-1}||T - \lambda I||P| = |T - \lambda I|.$$

■

Teorema 2.9 *Dado un endomorfismo $t : U \longrightarrow U$, λ es un autovalor de t si y sólo si $p_t(\lambda) = 0$.*

Prueba: Vimos que λ es una autovalor de t si y sólo si existe $\bar{x} \neq 0$ con:

$$t(\bar{x}) = \lambda\bar{x}.$$

Introduciendo una base B en U, matricialmente esta condición se escribe como:

$$T_B(x) = \lambda(x) \qquad \text{o equivalentemente} \qquad (T_B - \lambda I)(x) = \bar{0}.$$

Es decir λ es un autovalor de t si y sólo si el sistema homogéneo:

$$(T_B - \lambda I)(x) = \bar{0}$$

tiene solución distinta de la trivial. Pero esto ocurre si y sólo si la matriz del sistema es singular, es decir:

$$|T - \lambda I| = 0 \iff p_t(\lambda) = 0.$$

■

2.4 Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor.

Definición 2.10 *Dado un endomorfismo $t : U \longrightarrow U$ y un autovalor λ de t definimos:*

- **Multiplicidad algebraica de** λ*: Es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico $p_t(\lambda)$. Se denota por $m(\lambda)$.*

- **Multiplicidad geométrica de** λ*: Es la dimensión del espacio característico asociado a λ. Se denota por $d(\lambda)$.*

Veamos algunas propiedades de estas multiplicidades:

1. *La multiplicidad geométrica de un autovalor es siempre mayor que 0.*

$$d(\lambda) \geq 1$$

   Prueba: Basta tener en cuenta que por definición de autovalor S_λ siempre tiene algún autovector no nulo.

2. *Si n es la dimensión del espacio vectorial U y T es la matriz asociada a t en una base cualquiera, una forma habitual de calcular la multiplicidad geométrica es:*

$$\boxed{d(\lambda) = n - rg(T - \lambda I)}$$

   Prueba: Basta tener en cuenta que:

$$d(\lambda) = dim(S_\lambda) = dim(ker(t - \lambda I)) = n - dim(im(t - \lambda I)) = n - rg(T - \lambda I).$$

3. $$\boxed{\textit{Multiplicidad algebraica} \geq \textit{Multiplicidad geométrica}} \qquad \boxed{m(\lambda_i) \geq d(\lambda_i)}$$

   Prueba: Supongamos que λ_i es un autovalor del endomorfismo t. Sea $d = d(\lambda_i)$ su multiplicidad geométrica. Consideramos una base del subespacio característico S_{λ_i}:

$$\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_d\}$$

y la completamos hasta una base B de U:

$$B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_d, \bar{u}_{d+1}, \ldots, \bar{u}_n\}.$$

Veamos cual es la matriz T asociada a t con respecto a esta base. Sabemos que:

$$t(\bar{u}_1) = \lambda_i \bar{u}_1; \quad \ldots \quad t(\bar{u}_d) = \lambda_i \bar{u}_d.$$

Por tanto la matriz T es de la forma:

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \lambda_i & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & A \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & \\ \hline & & \Omega & & B \end{array}\right) \qquad \text{con} \quad \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_{d\times n-d}(\mathbb{K}). \\ B \in \mathcal{M}_{n-d\times n-d}(\mathbb{K}). \end{array}$$

Si ahora calculamos el polinomio característico de t utilizando esta matriz queda:

$$|T - \lambda I| = \left|\begin{array}{cccc|c} \lambda_i - \lambda & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \lambda_i - \lambda & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & A \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i - \lambda & \\ \hline & & \Omega & & B - \lambda I \end{array}\right| = (\lambda_i - \lambda)^d |B - \lambda I|$$

Vemos que λ_i es una raíz del polinomio característco de t con **al menos** multiplicidad d, por tanto:

$$m(\lambda_i) \geq d(\lambda_i).$$

■

4. *Si λ es un autovalor con $m(\lambda) = 1$, entonces $d(\lambda) = m(\lambda) = 1$.*

5. *El número máximo de autovectores independientes de un endomorfismo es*

$$d(\lambda_1) + \ldots + d(\lambda_k)$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son todos los autovalores de t.

Prueba: Basta tener en cuenta que la suma de todos los espacios de vectores característicos es una suma directa. Además se cumple:

$$d(\lambda_1) + \ldots + d(\lambda_k) \leq m(\lambda_1) + \ldots + m(\lambda_k) \leq n.$$

3 Diagonalización por semejanza.

3.1 Endomorfismos o matrices cuadradas diagonalizables.

Definición 3.1 *Se dice que es un endomorfismo $t : U \longrightarrow U$ es* **diagonalizable** *cuando existe una base B de U en la que la matriz asociada es diagonal:*

$$t \text{ diagonalizable} \iff \exists \text{ base } B / \ T_B \text{ diagonal.}$$

Podemos definir el concepto análogo para matrices cuadradas:

Definición 3.2 *Se dice que una matriz T es* **diagonalizable por semejanza** *cuando existe una matriz diagonal semejante a ella:*

$$T \text{ diagonalizable } \iff \exists D \text{ diagonal y } P \text{ regular },\ D = P^{-1}TP.$$

Teniendo en cuenta que dos matrices son semejantes precisamente si están asociadas a un mismo endomorfismo, el estudio de la diagonalización de matrices y endomorfismos es equivalente.

3.2 Matriz de un endomorfismo en una base de autovectores.

Teorema 3.3 *La condición necesaria y suficiente para que la matriz asociada a un endomorfismo sea diagonal es que esté expresada respecto a una base de autovectores.*

Prueba:

$\Longrightarrow$: Supongamos que $B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ es una base de U, de manera que la matriz asociada T_B es diagonal:

$$T_B = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

Esto quiere decir que:

$$t(\bar{u}_1) = t_1\bar{u}_1; \quad \ldots \quad t(\bar{u}_n) = t_n\bar{u}_n.$$

y por tanto todos los vectores de B son autovectores.

$\Longleftarrow$: Supongamos que $B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ es una base de autovectores de U, entonces se cumple:

$$t(\bar{u}_1) = \lambda_1\bar{u}_1; \quad \ldots \quad t(\bar{u}_n) = \lambda_n\bar{u}_n.$$

y por tanto la matriz asociada es diagonal:

$$T_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

3.3 Caracterización de los endomorfismos diagonalizables.

Acabamos de probar que:

Proposición 3.4 *Un endomorfismo $t : U \longrightarrow U$ es diagonalizable si y sólo si existe una base de autovectores.*

Este resultado se reformula habitualmente de la siguiente forma:

Teorema 3.5 *Un endomorfismo t en un espacio U n-dimensional es diagonalizable si y sólo si la suma de las multiplicidades algebraicas es igual a la dimensión de U y las multiplicidades algebraicas coinciden con las geométricas. Equivalentemente:*

$$t \text{ diagonalizable} \iff \begin{cases} m(\lambda_1)+\ldots+m(\lambda_k)=n. \\ \\ d(\lambda_1)=m(\lambda_1),\ldots,d(\lambda_k)=m(\lambda_k). \end{cases}$$

siendo $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ el conjunto de autovalores de t.

Prueba: Basta tener en cuenta lo siguiente.

Si t es diagonalizable, entonces existe una base de autovectores de U. En esa base la matriz T es diagonal y por tanto:

$$n=d(\lambda_1)+\ldots+d(\lambda_k)\leq m(\lambda_1)+\ldots+m(\lambda_k)=n$$

Recíprocamente si $d(\lambda_1)+\ldots+d(\lambda_k)=n$ y teniendo en cuenta que la suma de subespacios característicos $S_{\lambda_1}+\ldots+S_{\lambda_k}$ es una suma directa, podemos escoger una base de U de autovectores. Por tanto t diagonaliza. ■

Teniendo en cuenta la prueba anterior, la condición puede escribirse simplemente como:

Corolario 3.6 *Si t es un endomorfismo de un espacio U de dimensión n:*

$$t \text{ diagonalizable} \iff d(\lambda_1)+\ldots+d(\lambda_k)=n$$

siendo $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ el conjunto de autovalores de t.

3.4 Pasos para la diagonalización de un endomorfismo t.

Supongamos que tenemos un espacio vectorial U de dimensión n y un endomorfismo $t:U\longrightarrow U$ cuya matriz respecto a una base B es T_B. Los pasos para diagonalizarlo (si es posible) son los siguientes.

1. Calcular el polinomio característico $p_t(\lambda)=|T_B-\lambda I|$.
2. Calcular las raíces del polinomio característico, que serán los autovalores de t. Obtendremos valores $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ con multiplicidades algebracias $m_{\lambda_1},\ldots,m_{\lambda_k}$.
   (a) Si $m_{\lambda_1}+\ldots+m_{\lambda_k}<n$ el endomorfismo **no diagonaliza**.
   (b) Si $m_{\lambda_1}+\ldots+m_{\lambda_k}=n$, calculamos las multiplicidades geométricas de cada autovalor de t:

   $$d(\lambda_i)=dim(S_{\lambda_i})=n-rango(T-\lambda I)\qquad i=1,\ldots,k.$$

      i. Si alguna multiplicidad geométrica no coincide con la algebraica, entonces **no diagonaliza**.

ii. Si todas las multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden, entonces f **si diagonaliza**.
La forma diagonal es aquella que tiene todos los autovalores en la diagonal repetidos cuantas veces indique su multiplidad algebraica:

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_1\end{matrix} & \dots & \Omega \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \Omega & \dots & \begin{matrix}\lambda_k & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k\end{matrix}\end{array}\right)$$

de manera que:

$$D = (M_{BB'})^{-1} T_B M_{BB'}$$

siendo $M_{BB'}$ la matriz de paso entre una base B' de autovectores de t y la base de partida B.
La base correspondiente se calcula, a partir de una base da autovectores asociados a cada autovalor de t. Estos se calculan resolviendo los sistemas:

$$S_{\lambda_i} = ker(t - \lambda I) = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in U | \, (T - \lambda_i I) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \bar{0} \right\}.$$

para cada $i = 1, 2, \dots, k$.
En otras palabras **las columnas de $M_{BB'}$ son las coordenadas de autovectores de t linealmente independientes y respecto a la base de partida B.** Además, **han de ordenarse de manera coherente con los autovalores, de forma que si en la columna j-ésima de D aparece λ_s en la diagonal, en la columna j-ésima de $M_{BB'}$ ha de aparecer un autovector asociado al autovalor λ_s.**

3.5 Aplicación para obtener potencias de matrices.

Supongamos que A es una matriz diagonalizable y nos interesa calcular A^p. Podemos proceder de la siguiente forma.

Por ser A diagonalizable, hay una matriz P regular tal que:

$$D = P^{-1}AP \quad \text{tal que} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Entonces $A = PDP^{-1}$ y:

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{(PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PDP^{-1})}_{k \text{ veces}} = \\ &= P \underbrace{(P^{-1}PD) \cdot (P^{-1}PD) \ldots \cdot (P^{-1}P \cdot D)}_{k \text{ veces}} P^{-1} = PD^kP^{-1}. \end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{A^k = PD^kP^{-1}} \qquad \text{con} \qquad D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}.$$

4 Triangularización por semejanza.

4.1 Endomorfismos o matrices triangulares por semejanza.

Definición 4.1 *Un endomorfismo $t : U \longrightarrow U$ se dice* **triangularizable** *si existe una base B de U en el que la matriz T_B asociada es triangular.*

$$t \text{ triangularizable} \iff \exists \text{ base } B /\ T_B \text{ triangular.}$$

El concepto análogo para matrices cuadradas será:

Definición 4.2 *Se dice que una matriz T es* **triangularizable** *cuando existe una matriz triangular semejante a ella:*

$$T \text{ triangularizable} \iff \exists J \text{ triangular y } P \text{ regular },\ J = P^{-1}TP.$$

Observación 4.3 *Si la matriz de un endomorfismo $t : U \longrightarrow U$ respecto a una base*

$$B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$$

es triangular **superior**, *entonces exixte una base B' en la que la matriz asociada es triangular* **inferior** *y viceversa. Para ello basta tomar los vectores de B en el orden inverso:*

$$B' = \{\bar{u}_n, \dots, \bar{u}_1\}.$$

Nosotros buscaremos matrices **triangulares superiores** semejantes a una dada. El resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 4.4 *Sea U un espacio vectorial n-dimensional. Un endomorfismo $t : U \longrightarrow U$ es triangularizable si y sólo si t tiene n autovalores contados con su multiplicidad algebraica. Es decir:*

$$t \text{ triangularizable} \iff m(\lambda_1) + \ldots + m(\lambda_k) = n$$

donde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ es el conjunto de autovalores de t.

Prueba:

$\Longrightarrow$: Supongamos que t es triangularizable. Entonces existe una base B en la cual la matiz T_B es triangular. Si calculamos el polinomio característico utilizando esta base queda:

$$|T - \lambda I| = (t_{11} - \lambda)(t_{22} - \lambda) \ldots (t_{nn} - \lambda)$$

es decir vemos que hay exactamente n autovalores (iguales o distintos).

$\Longleftarrow$: Supongamos que t tiene n autovalores (iguales o distintos). Veamos que entonces triangulariza. Lo probaremos por inducción:

- Para $n = 1$ se cumple porque una matriz de dimensión 1×1 siempre es triangular.

- Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$ y probémoslo para n.

Sea λ_1 un autovalor. Entonces $d(\lambda_1) \geq 1$ y existe al menos un autovector $\bar{x}_1 \neq 0$ asociado a λ_1. Tomamos una base B_1 cuyo primer vector sea $\bar{x}_1$:

$$B_1 = \{\bar{x}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}.$$

En esta base la matriz asociada a t es:

$$T_{B_1} = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Nos fijamos en lo siguiente:

$$|T_{B_1} - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda)|T' - \lambda I|,$$

es decir, el polinomio característico de t factoriaza a través del polinomio característico de T'. Por tanto si t tiene n autovalores, T' tendrá $n - 1$ autovalores.

Ahora por hipótesis de inducción, T' es triangularizable. Sabemos que existe una matriz $P \in \mathcal{M}_{n-1 \times n-1}(\mathbb{K})$ regular de manera que:

$$B = P^{-1}T'P \quad \text{donde } B \text{ es triangular superior.}$$

Sea Q la matriz:

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} Q^{-1}T_{B_1}Q &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1}T' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1}T'P & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) = S \end{aligned}$$

donde por ser B triangular superior, S es triangular superior. En definitiva hemos probado que la matriz T_{B_1} asociada a t es triangularizable por semejanza y por tanto t es triangularizable. ∎

Observación 4.5 *Si estamos trabajando sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de números complejos, el Teorema Fundamental del Álgebra afirma que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (complejas iguales o distintas). Toda matriz cuadrada sobre el cuerpo de números complejos es triangularizable.*

En el cuerpo de número reales no se tiene este resultado. Hay polinomios de grado n que no tienen n soluciones reales.

4.2 Forma canónica de Jordan.

Definición 4.6 *Dado un escalar λ llamamos* **bloque de Jordan** *o* **caja de Jordan** *asociado a λ y de dimensión m la matriz $m \times m$-dimensional:*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definición 4.7 *Llamamos* **matriz de Jordan** *a una matriz formada por varios bloques de Jordan asociados a escalares iguales o distintos, colocados de la forma:*

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & \Omega & \ldots & \Omega \\ \hline \Omega & J_2 & \ldots & \Omega \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \Omega & \Omega & \ldots & J_p \end{array} \right),$$

donde $J_1, J_2, \ldots, J_p$ son bloques de Jordan.

Admitiremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 4.8 *Toda matriz triangularizable es semejante a una matriz de Jordan.*

El objetivo en lo que resta esta sección es describir como, dada una matriz triangularizable, obtener una forma de Jordan y la base en la que se expresa.

4.3 Obtención de la forma de Jordan.

Veamos los pasos para calcula la forma de Jordan de una matriz $T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Calculamos el polinomio característico $p_t(\lambda) = |T - \lambda I|$.
2. Calculamos las raíces del polinomio característico, que serán los autovectores de t. Obtendremos valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ con multiplicidades algebracias $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_k}$.
   (a) Si $m_{\lambda_1} + \ldots + m_{\lambda_k} < n$ la matriz **no triangulariza**.
   (b) Si $m_{\lambda_1} + \ldots + m_{\lambda_k} = n$ la matriz **si triangulariza**. Veamos como calcular la forma de Jordan. Calcularemos **la parte de forma de Jordan relativa a cada autovalor de manera independiente**. Supondremos que trabajamos con el autovalor λ_i:

i. Calculamos los subespacios:

$$S_{\lambda_i,p} = ker(T - \lambda I)^p$$

para sucesivos valores de p. Nos detendremos cuando

$$dim(S_{\lambda_i,p+1}) = dim(S_{\lambda_i,p}).$$

Con esta notación $S_{\lambda_i,1} = S_{\lambda_i}$.

ii. La mutliplicidad geométrica $d(\lambda_i)$ indica el **número de bloques de Jordan relativos al autovalor λ_i:**

$$\boxed{\text{Multiplicidad geométrica } d(\lambda_i) = \text{número de cajas de Jordan}}$$

iii. Consideramos los siguientes valores:

$$\begin{array}{rcl}
dim(S_{\lambda_i,1}) & \longrightarrow & f_1 = d(\lambda_i) \\
 & \longrightarrow & f_2 = dim(S_{\lambda_i,2}) - dim(S_{\lambda_i,1}) \\
dim(S_{\lambda_i,2}) & & \\
 & \longrightarrow & f_3 = dim(S_{\lambda_i,3}) - dim(S_{\lambda_i,2}) \\
dim(S_{\lambda_i,3}) & & \\
\vdots & & \vdots \\
dim(S_{\lambda_i,p-1}) & & \\
 & \longrightarrow & f_p = dim(S_{\lambda_i,p}) - dim(S_{\lambda_i,p-1}) \\
dim(S_{\lambda_i,p}) & &
\end{array}$$

se tiene que verificar que $f_k \geq f_{k+1}$.

iv. Formamos un esquema de p columnas, de manera que la columna k-ésima está formada por f_p elementos:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
n_1 & \longrightarrow & * & * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \\
n_2 & \longrightarrow & * & * & \dots & * & \dots & * & & \\
 & & & \vdots & & & & & & \\
n_{f_1} & \longrightarrow & * & * & \dots & * & & & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & & & & & & \uparrow \\
 & & f_1 & f_2 & & & & & & f_p
\end{array}$$

donde $d = f_1 = d(\lambda_i)$. Ahora **el número de elementos de cada fila** del esquema nos indica **la dimensión de cada uno de los bloques de Jordan relativos al autovalor** λ_i:

$$J(\lambda_i) = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
J_{n_1 \times n_1} & \Omega & \dots & \Omega \\ \hline
\Omega & J_{n_2 \times n_2} & \dots & \Omega \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
\Omega & \Omega & \dots & J_{n_d \times n_d}
\end{array} \right)$$

Observamos que conviene ordenar las cajas empezando por la mayor y terminando por la de menor dimensión.

v. Para obtener la base en la que se obtiene esta forma de Jordan, hacemos lo siguiente. Buscaremos los siguientes vectores cuya estructura copia la descrita anteriormente:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & S_{\lambda_i,1} & S_{\lambda_i,2} & \ldots & S_{\lambda_i,n_{f_1}} & \ldots & S_{\lambda_i,n_2} & \ldots & S_{\lambda_i,n_1} \\
n_1 & \longrightarrow & \bar{x}_{1,1} & \bar{x}_{1,2} & \ldots & \bar{x}_{1,n_{f_1}} & \ldots & \bar{x}_{1,n_2} & \ldots & \boxed{\bar{x}_{1,n_1}} \\
n_2 & \longrightarrow & \bar{x}_{2,1} & \bar{x}_{2,2} & \ldots & \bar{x}_{2,n_{f_1}} & \ldots & \boxed{\bar{x}_{2,n_2}} & & \\
 & & & \vdots & & & & & & \\
n_{f_1} & \longrightarrow & \bar{x}_{f_1,1} & \bar{x}_{f_1,2} & \ldots & \boxed{\bar{x}_{f_1,n_{f_1}}} & & & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & & & & & & \uparrow \\
 & & f_1 & f_2 & & & & & & f_p
\end{array}$$

donde

$$\boxed{\bar{x}_{j,k} = (T - \lambda_i I)\bar{x}_{j,k+1}}$$

Por tanto para construir estos vectores basta escoger en cada fila el vector de **la derecha**, de manera que al calcular el **primer** vector de cada fila se obtengan vectores linealmente independientes:

$$\{\bar{x}_{1,1}, \bar{x}_{2,1}, \ldots, \bar{x}_{f_1,1}\}.$$

La base buscada estará formada por todos estos vectores **ordenados de izquierda a derecha y de arriba abajo**:

$$\{\bar{x}_{1,1}, \bar{x}_{1,2}, \ldots, \bar{x}_{1,n_1}, \bar{x}_{2,1}, \bar{x}_{2,2}, \ldots, \bar{x}_{2,n_2}, \ldots, \bar{x}_{f_1,1}, \bar{x}_{f_1,2}, \ldots, \bar{x}_{f_1,n_{f_1}}\}$$

vi. Finalmente la forma de Jordan buscada se formará uniendo las formas de Jordan de cada autovalor:

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
J(\lambda_1) & \Omega & \ldots & \Omega \\ \hline
\Omega & J(\lambda_2) & \ldots & \Omega \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
\Omega & \Omega & \ldots & J(\lambda_p)
\end{array}\right),$$

y la base B' en la que se expresa formada por todos las base que hemos obtenido para cada autovalor, **respetando el orden en que ha sido colocado cada vector**. De esta forma:

$$J = (M_{BB'})^{-1} T M_{BB'}$$

siendo B la base de partida.

4.4 Aplicación para obtener potencias de matrices.

Supongamos que A es una matriz triangularizable y nos interesa calcular A^k. El procedimiento es análogo al de matrices diagonalizables.

Por ser A triangularizable, hay una matriz P regular tal que:

$$J = P^{-1}AP \quad \text{tal que} \quad J \text{ es una forma de Jordan.}$$

Entonces $A = P^{-1}JP$ y:

$$\begin{aligned}
A^k &= \underbrace{(PJP^{-1}) \cdot (PJP^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PJP^{-1})}_{k \text{ veces}} = \\
&= P\,\underbrace{(P^{-1}PJ) \cdot (P^{-1}PJ) \ldots \cdot (P^{-1}P \cdot J)}_{k \text{ veces}}\,P^{-1} = PJ^kP^{-1}.
\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{A^k = PJ^kP^{-1}}$$

Para calcular J^k puede hacerse lo siguiente. Descomponemos J como suma de dos matrices, una diagonal D y otra T triangular superior con ceros en la diagonal:

$$J = D + T \quad \Rightarrow \quad J^k = (D+T)^k.$$

Aunque **en general la fórmula del binomio de Newton no es cierta para matrices, si lo es en esta caso (ya que D y T conmutan)**. Por tanto:

$$(D+T)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i T^{k-i}.$$

El cálculo de las potencias de D y T es muy sencillo; de hecho a partir de un exponente suficientemente grande la matriz T^{k-i} se anulará.