Tema II

Matrices y Determinantes.

1. Matrices.

1 Definiciones básicas.

Definición 1.1 *Una* **matriz** *A de dimensión $m \times n$ es un conjunto de escalares de un cuerpo $\mathbb{K}$ dispuesto en m-filas y n-columnas.*

Si $m = n$ la matriz se llama **cuadrada** *y en otro caso* **rectangular***.*

Para nombrar una matriz utilizaremos usualmente letras mayúsculas, mientras que para sus elementos utilizaremos letras minúsculas. En concreto, el elemento que ocupa la fila i-ésima y la columna j-ésima de una matriz A se denotará por a_{ij} o excepcionalmente por, $(A)_{ij}$:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

El conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas definidas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ será denotado por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si previamente hemos fijado el cuerpo sobre el cual estamos trabajando, utilizaremos simplemente $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y además coinciden todos sus elementos con la misma ordenación.

2 Operaciones con matrices.

2.1 Suma de matrices.

Dadas dos matrices A, B de la misma dimensión y definidas sobre el mismo cuerpo, la matriz suma de A y B es la matriz:

$$C = A + B, \quad \text{con} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Por tanto la suma de matrices es una operación interna en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Como consecuencia de la estructura de grupo del cuerpo $\mathbb{K}$, la suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

1. **Conmutativa:**
$$A + B = B + A,$$
para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

2. **Asociativa:**
$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$
para cualesquiera $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

3. **Elemento neutro:** La matriz $\Omega \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ en la que todos los elementos son nulos, es el elemento neutro de la suma, es decir:
$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad A + \Omega = \Omega + A = A,$$
para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

4. **Elemento opuesto:** Para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, existe una matriz $-A = (-a_{ij})$, verificando que
$$A + (-A) = \Omega.$$

Por tanto el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con la operación suma tiene estructura de grupo abeliano.

2.2 Producto de una matriz por un escalar.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ definimos la matriz producto de α por A como:
$$B = \alpha \cdot A, \quad \text{con} \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

El producto de un escalar por una matriz cumple las siguientes propiedades

1. $1 \cdot A = A$, para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$, para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$, para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
4. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$, para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

2.3 Producto de matrices.

Para poder multiplicar dos matrices es necesario que *el número de columnas de la primera coincida con el número de fila de la segunda.*

Por tanto dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ definimos la matriz producto $C = A \cdot B \in M_{m\times p}$ como:
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, p.$$

de manera que el término de la posición i, j de la matriz producto se obtiene utilizando la fila i-ésima de la primera matriz y la columna j-ésima de la segunda.

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix}} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \boxed{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Veamos algunas propiedades:

1. **Asociativa:**

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$$

para cualesquiera $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$.

Prueba: Se tiene:

$$[A \cdot (B \cdot C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B \cdot C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

y por otra parte:

$$[(A \cdot B) \cdot C]_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(A \cdot B)_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

Vemos que ambas expresiones coinciden (los papeles de los índices l y k aparecen intercambiados).

2. **Elemento neutro:** Definimos la **matriz identidad de orden** r como $I_r \in \mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{K})$:

$$I_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que se cumple:

$$A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$$

para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Se le llama el **delta de Kronecker** a los elementos

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Con esta notación los elementos de la matriz identidad son los del delta de Kronecker.

3. **Distributiva respecto a la suma:**

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad \text{con } A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \quad B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}$$

y

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad \text{con } A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}, C \in \mathcal{M}_{n\times p}.$$

Es importante indicar que,

El producto de matrices NO cumple la propiedad CONMUTATIVA.

es decir, en general $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2.3.1 Inversa de una matriz.

Definición 2.1 *Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tiene* **inversa** *si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ verificando:*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

En este caso A se dice **regular** *ó* **invertible** *ó* **no singular** *y su matriz inversa de denota por A^{-1}.*

Si A no tiene inversa, se dice **singular**.

Veamos algunas propiedades:

1. Si existe la inversa de A, es única.

   Prueba: Supongamos que existen matrices $B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ verificando:

   $$A \cdot B = B \cdot A = I_n \text{ y } A \cdot C = C \cdot A = I_n.$$

   Entonces:

   $$B = I_n \cdot B = (C \cdot A) \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = C \cdot I_n = C.$$

2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tienen inversa, entonces

   $$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

   Prueba: Se tiene:

   $$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n.$$

   $$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n.$$

Veremos más adelante diversos métodos para el cálculo de una matriz inversa.

2.3.2 Potencia de una matriz.

Dado un número entero k y una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ definimos la potencia k-ésima de A como:

$$A^k = \begin{cases} \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-veces}} & \text{si } k > 0. \\ I_n & \text{si } k = 0. \\ \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{(-k)\text{-veces}} & \text{si } k < 0 \text{ (y } A \text{ es regular).} \end{cases}$$

Es claro que se cumple que:

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}$$

Sin embargo, y debido a que el producto de matrices **no es conmutativo**, en general:

$$A^k B^k \neq (A \cdot B)^k$$

2.4 Matriz traspuesta.

Definición 2.2 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definimos la* **matriz traspuesta** *de A como la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ que se obtiene de A intercambiando las filas por las columnas:*

$$(A^t)_{ij} = (A)_{ji} \qquad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m.$$

Algunas propiedades de la trasposición son:

1. $(A^t)^t = A$, para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$, para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, para cualesquiera $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$.

   Prueba: Se tiene:

   $$(A \cdot B)^t_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}(B^t)_{ik}(A^t)_{kj} = (B^t \cdot A^t)_{ij}$$

5. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, para cualquier $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

   Prueba: Basta tener en cuenta que:

   $$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I^t = I; \qquad (A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = I^t = I.$$

2.5 Traza de una matriz.

Definición 2.3 *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se llama traza de la matriz a la suma de los elementos de su diagonal, es decir:*

$$traza(A) = tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

La traza de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ entonces $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

   Prueba: Esto es evidente sin más que tener en cuenta que los términos de la diagonal de $A + B$ se obtienen sumando los términos de la diagonal de A con los términos de la diagonal de B. Formalmente, si $D = A + B$:

   $$tr(A + B) = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \sum_{k=1}^{n}(a_{kk} + b_{kk}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{kk}) + (\sum_{k=1}^{n} b_{kk}) = tr(A) + tr(B)$$

2. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ y $\alpha \in K$ entonces $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.

   Prueba: De nuevo sólo hay que tener en cuenta que los términos de la diagonal de (αA) se obtienen multiplicando por α los términos de la diagonal de A. Formalmente, si $D = \alpha A$:

   $$tr(\alpha A) = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{kk}) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \alpha tr(A)$$

3. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ entonces $tr(A) = tr(A^t)$.

   Prueba: Basta tener en cuenta que los elementos de la diagonal de una matriz y su traspuesta coinciden, ya que se mantienen en la misma posición al cambiar filas por columnas.

4. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ entonces $tr(BA) = tr(AB)$.

   Prueba: Antes de nada recordemos que el producto de matrices no es conmutativo, es decir, en general $AB \neq BA$. Sin embargo lo que nos dice la propiedad es que si bien las dos matrices que se obtienen al cambiar el orden del producto pueden ser diferentes, su traza es la misma.

   Calculemos primero la traza de AB. Sea $D = AB$.

$$tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{km}b_{mk}$$

   Ahora la traza de BA. Sea $D' = BA$.

$$tr(BA) = \sum_{k=1}^{n} d'_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} b_{km}a_{mk} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{km}$$

   Vemos que ambas coinciden.

5. Si $A, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ y C es inversible entonces $tr(C^{-1}AC) = tr(A)$.

   Basta aplicar el apartado anterior para las matrices $C^{-1}A$ y C:

$$tr((C^{-1}A)C) = tr(C(C^{-1}A)) = tr(IA) = tr(A)$$

   (donde I es la matriz identidad de orden n.)

3 Matrices especiales.

3.1 Matrices simétricas y hemisimétricas.

Definición 3.1 *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ dedimos que A es:*

- **simétrica** *cuando $A = A^t$.*
- **antisimétrica** *ó* **hemisimétrica** *cuando $A = -A^t$.*

De la definición es fácil comprobar lo siguiente:

1. Toda matriz hemisimétrica tiene ceros en la diagonal.

   Prueba: Si A es hemisimétrica:

$$a_{ii} = -a_{ii} \quad \Rightarrow \quad 2a_{ii} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{ii} = 0$$

   para cualquier $i = 1, \ldots, n$.

2. La única matriz simétrica y hemisimétrica al mismo tiempo es la matriz Ω.

   Prueba: Si A es simétrica y hemisimétrica se tiene:

$$a_{ij} \overset{A\text{ simétr.}}{=} a_{ji} \overset{A\text{ hemisimétr.}}{=} -a_{ij} \quad \Rightarrow \quad 2a_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = 0$$

   para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, n$.

3. Toda matriz cuadrada se descompone de manera única como suma de una simétrica y otra antisimétrica.

   Prueba: Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ puede escribirse como:

$$A = S + H, \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} S = \dfrac{1}{2}(A + A^t) \\ \\ H = \dfrac{1}{2}(A - A^t) \end{cases}$$

   donde S es simétrica y H es hemisimétrica.

   Además si A tuviese otra descomposición de este tipo $A = S' + H'$ con S' simétrica y H' hemisimétrica:

$$S + H = A = S' + H' \quad \Rightarrow \quad S - S' = H - H'$$

   de manera que $S - S' = H - H'$ sería simétrica y hemisimétrica al mismo tiempo. Por tanto $S - S' = H - H' = \Omega$ y ambas descomposiciones coinciden.

3.2 Matriz diagonal.

Definición 3.2 *Una* **matriz diagonal** *es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no están en la diagonal son nulos.*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente:

$$D \textit{ diagonal} \iff d_{ij} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j$$

Para cualquier par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica:

$$A, B \text{ diagonales} \quad \Rightarrow \quad \alpha A,\ A^t,\ A^{-1} \text{ (si existe)},\ A + B,\ A \cdot B \text{ diagonales}$$

3.3 Matrices triangulares.

Definición 3.3 *Una* **matriz triangular superior** *es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que están por debajo de la diagonal son nulos.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente:

$$A \, \textbf{triangular superior} \iff a_{ij} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad i > j.$$

Para cualquier par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica:

$$A, B \begin{array}{c}\text{triangulares} \\ \text{superiores}\end{array} \quad \Rightarrow \quad \alpha A,\ A^{-1} \text{ (si existe)},\ A + B,\ A \cdot B \begin{array}{c}\text{triangulares} \\ \text{superiores}\end{array}$$

Definición 3.4 *Una* **matriz triangular inferior** *es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que están por encima de la diagonal son nulos.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente:

$$A\,\textbf{triangular inferior} \iff a_{ij} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad i < j.$$

Para cualquier par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica:

$$A, B \begin{array}{c}\text{triangulares}\\ \text{inferiores}\end{array} \quad \Rightarrow \quad \alpha A,\ A^{-1}\ \text{(si existe)},\ A+B,\ A\cdot B \begin{array}{c}\text{triangulares}\\ \text{inferiores}\end{array}$$

3.4 Matrices ortogonales.

Definición 3.5 *Una* **matriz ortogonal** *es una matriz cuadrada e inversible A cuya inversa coincide con su traspuesta:*

$$A^{-1} = A^t.$$