Álgebra Lineal I — Soluciones al Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **23 de enero de 2025**

1.– *Con los diez dígitos del* 0 *al* 9 *y las letras* A, B, C *se van a formar claves de siete caracteres: cada una de ellas con exactamente cinco números y dos letras.*

(i) *¿Cuántas claves distintas pueden formarse en las que los números no pueden repetirse pero las letras si?.*

Primero contamos las posiblidades para las dos posiciones en que irán las 2 letras en el conjunto de los 7 caracteres que forman una clave. Son las formas de elegir 2 elementos entre un total de 7 sin poder repetir y sin importar el orden: combinaciones sin repetición de 7 elementos tomados de 2 en 2: $C_{7,2} = \binom{7}{2}$.

Después tenemos que escoger los 5 números distintos entre los 10 posibles que van en las posiciones donde no van las letras; se trata de variaciones sin repetición de 9 elementos tomados de 5 en 5: $V_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Finalmente escogemos las dos letras que van en las posiciones restantes. Ahora podemos repetirlas. Son variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2: $VR_{3,2} = 3^2$.

En total:

$$C_{7,2} \cdot V_{9,5} \cdot VR_{3,2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3^2 = 5715360.$$

(ii) *¿Cuántas pudiendo repetir letras y números, pero de manera que las dos letras no estén juntas?..*

Razonamos como antes, con algunos matices. La primera diferencia es que ahora los números pueden repetirse. Por tanto en lugar de variaciones sin repetición usamos con repeteción $VR_{10,5} = 10^5$.

Además del total de posiciones $C_{7,2}$ donde pueden ir las dos letras, descontamos aquellas en que van juntas. Son 6 opciones, dependiendo de la posición de la primera letra del grupo de dos. Por tanto las claves donde las dos letras NO están juntas son:

$$(C_{7,2} - 6) \cdot VR_{10,5} \cdot VR_{3,2} = 15 \cdot 10^5 \cdot 3^2 = \ldots = 13500000.$$

2.– *Dado* $n \in \mathbb{N}$ *se define la matriz* $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \geq j \\ j+1-i \text{ si } i < j \end{cases}$$

(i) *Escribir la matriz* P_4 *y hallar* $det(P_4)$*.*

Para $n = 4$ queda:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallr del $det(P_4)$ restamos a cada fila la anterior empezando de abajo hacia arriba. Queda:

$$det(P_4) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^3 = -1.$$

(ii) *Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$, $rango(P_n)$ y $traza(P_n)$.*

La matriz es:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar el determinante hacemos lo mismo que en el caso $n = 4$. Restamos a cada fila la anterior empezando de abajo hacia arriba. Queda:

$$det(P_n) = det(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} = -1.$$

La traza es la suma de los términos de la diagonal de P_n:

$$traza(P_n) = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}} = n.$$

Además como $det(P_n) \neq 0$ el rango es el máximo posible, es decir, $rango(P_n) = n$.

3.– *Hallar una matriz diagonal D congruente con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y una matriz inversible P tal que $P^tDP = A$. ¿Existe alguna matriz diagonal D' con traza cero congruente con A?. En caso afirmativo calcularla.*

La relación $P^tDP = A$ es de congruencia. Entonces diagonalizamos A por congruencia realizando operaciones elementales fila y exactamente las mismas en columna:

$$A \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(1)} \xrightarrow{\mu_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

En $P^tDP = A$, la matriz P representa las operaciones columna que hay que hacer para pasar de D a A. La obtenemos realizando sobre la identidad en orden opuesto la inversa de las operaciones elementales columna realizadas en el proceso de diagonalización de A.

$$Id \xrightarrow{\mu_{32}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(2)} \xrightarrow{\mu_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = P$$

Por último podemos conseguir una matriz congruente con la original de traza cero si en la matriz que hemos obtenido en lugar de $1, -4, 1$ en la diagonal tenemos por ejemplo $3, -4, 1$. Para ello hacemos una operación elemental más fila y su análoga en columna:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(\sqrt{3})} \xrightarrow{\mu_1(\sqrt{3})} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D'$$

4.− *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & a & 6 \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$

(i) *Estudiar para que valores de a, b las matrices son equivalentes por filas.*

Para ver si son equivalentes por filas, comparamos las formas canónicas reducidas por filas de ambas matrices. Empezamos con la matriz A:

$$A \overset{H_{21}(-2)H_{31}(-4)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(1)H_{32}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz B:

$$B \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & a & 8 \\ 0 & 1 & b+4 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & b+4 \\ 0 & a & 8 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & b+4 \\ 0 & 0 & 8-ab-4a \end{pmatrix}$$

Para que ambas formas canónicas reducidas por filas coincidan tienen que cumplirse:

$$b+4=4, \qquad 8-ab-4a=0.$$

De donde $b=0$ y $a=2$.

(ii) *Hallar (si existe) una matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ inversible tal que* $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicar por una matriz inversible a la derecha equivale a hacer operaciones elementales columna sobre A:

$$A \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(2)\mu_{32}(-4)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar X hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hemos hecho en el proceso anterior.

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{12}(2)\mu_{32}(-4)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{\mu_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = X$$

5.− *Sea A una matriz cuadrada 5×5. Analizar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $A^t = -A$ entonces $det(A) = 0$.*

VERDADERO. Por las propiedades de los determinantes:

$$det(A) = det(A^t) = det(-A) = (-1)^5 det(A) = -det(A) \Rightarrow 2det(A) = 0 \Rightarrow det(A) = 0.$$

(ii) *$rango(A) = rango(A^2)$.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que $A^2 = \Omega$. Por tanto $rango(A) = 1$ pero $rango(A^2) = rango(\Omega) = 0$.

(iii) *Si A es inversible entonces $rango(A) = rango(A^2)$.*

VERDADERO. Si A es inversible entonces $rango(A) = 5$ y $det(A) \neq 0$ y $det(A^2) = det(A)^2 \neq 0$. Por tanto $rango(A^2) = 5 = rango(A)$.

(iv) *Si A es simétrica y $det(A) > 0$ entonces A es congruente con la matriz Id.*

FALSO. Por ejemplo si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ se tiene que A es simétrica y con $det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 > 0$. Pero A NO es congruente con la identidad porque ambas ya están diagonalizadas y no tienen el mismo número de signos positivos y negativos en la diagonal.

6.– *En el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consideramos los subconjuntos $S = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A = A^t\}$ (matrices simétricas) y $H = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$ (matrices hemisimétricas).*

(i) *Probar que H es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

Para ver que es subespacio hay que comprobar:

- Que contiene al vector cero: efecitvamente $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$ porque $\Omega^t = -\Omega$.

- Que dados $A, B \in H$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $aA + bB \in H$. Pero si $A, B \in H$ entonces $A^t = -A$ y $B^t = -B$. Por tanto:

$$(aA + bB)^t = aA^t + bB^t = -aA - bB = -(aA + bB)$$

y por tanto $aA + bB \in H$.

(ii) *Demostrar que el conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

Para que B sea una base tiene que cumplir dos condiciones:

- Tener tantos vectores como la dimensión del espacio. Pero $dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$ y B tiene cuatro vectores. Por tanto se cumple.

- Los vectores de B deben de ser linalmente independientes. Equivalentemente la matriz que forman sus coordenadas en la base canónica debe de ser de rango 4.

Recordemos que la base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (1,0,0,0)_B,\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (1,1,0,0)_B,\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv (1,1,1,0)_B,\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1,1,1,1)_B$$

y

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

(iii) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de H en la base B.*

Una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ pertenece a H si $A^t = -A$ es decir, si:

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff x = -x,\ y = -z, \quad t = -t$$

Por tanto las implícitas de H en la base canónica son:

$$x = 0, \qquad y + z = 0, \qquad t = 0.$$

(son independientes porque el rango de la matriz de coeficientes es 3: $rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$).

Las pasamos a la base B. Para ello las escribimos matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

Y tenemos en cuenta la fórmula de cambio de base que relaciona las coorenadas en la base B y en la base C:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}, \quad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Susituimos en las ecuaciones anteriores obtenemos las implicícitas en la base B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = 0 \iff x' + y' + z' + t' = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = 0 \iff y' + 2z' + 2t' = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = 0 \iff t' = 0$$

Para las paramétricas resolvemos el sistema que forman las ecuaciones anteriores en función de

$$dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) - \text{número de ecuaciones} = 4 - 3 = 1.$$

Obtenemos:

$$t' = 0, \qquad y' = -2z', \qquad x' = -y' - z' = z'.$$

de donde las paramétricas son:

$$x' = \lambda, \quad y' = -2\lambda, \quad z' = \lambda, \quad t' = 0.$$

(iv) *Sabiendo que S es también subespacio, probar que S y H son subespacios suplementarios.*

Son suplementarios si $dim(S + H) = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ y $dim(S \cap H) = 0$. Equivalentemente si $dim(S) + dim(H) = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ y $dim(S \cap H) = 0$ ó $dim(S + H) = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$.

Hemos visto que $dim(H) = 1$ porque las paramétricas dependen de un parámetro y de hecho $H = \mathcal{L}\{(0, 1, -1, 0)_C\}$.

Por otra parte una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ pertenece a S si $A^t = A$ es decir, si:

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff z = y$$

De ahí las paramétricas serían:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = b, \quad t = c$$

y por tanto $S = \mathcal{L}\{(1,0,0,0)_C, (0,1,1,0)_C, (0,0,0,1)_C\}$ y $dim(S) = 3$.

Entonces $dim(S) + dim(H) = 3 + 1 = 4 = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ y la primera condición se cumple.

Además:

$$dim(S+H) = dim(\mathcal{L}\{\underbrace{(1,0,0,0)_C, (0,1,1,0)_C, (0,0,0,1)_C}_{S}, \underbrace{(0,1,-1,0)_C}_{H}\}) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

y por tanto se cumple la segunda condición.

(v) *Calcular la matriz que es proyección de* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *sobre* H *paralelamente a* S.

La matriz dada tiene coordenadas $(1,3,1,1)_C$ en la base canónica. La pasamos a la base que combina una de S y otra de H:

$$B' = \{\underbrace{(1,0,0,0)_C, (0,1,1,0)_C, (0,0,0,1)_C}_{S}, \underbrace{(0,1,-1,0)_C}_{H}\}$$

Para ello usamos la fórmula de cambio de base:

$$M_{B'C}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{CB'}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$(1,3,1,1)_C = \underbrace{1\cdot(1,0,0,0)_C + 2\cdot(0,1,1,0)_C, +1\cdot(0,0,0,1)_C}_{S} + \underbrace{1\cdot(0,1,-1,0)_C}_{H}$$

y así la proyección sobre H es:

$$1\cdot(0,1,-1,0)_C = (0,1,-1,0)_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nota: También podría usarse que hemos visto en teoría que toda matriz se descompone de la forma:

$$A = \underbrace{\frac{A + A^t}{2}}_{\in S} + \underbrace{\frac{A - A^t}{2}}_{\in H}$$

Por tanto la proyección sobre H de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sería:

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \qquad f(p(x)) = (p(-1), p'(1))$$

(i) *Hallar $f(x^2 - 1)$.*

Directamente si $p(x) = x^2 - 1$ entonces:

$$p'(x) = 2x, \quad p(-1) = (-1)^2 - 1 = 0, \quad p'(1) = 2 \cdot (1) = 2.$$

Por tanto $f(x^2 - 1) = (0, 2)$.

(ii) *Demostrar que f es una aplicación lineal.*

Dados $p(x), q(x)$ polinomios y $a, b \in \mathbb{R}$ para que sea lineal tiene que cumplirse que:

$$f(ap(x) + bq(x)) = af(p(x)) + bf(q(x))$$

Veámoslo:

$$f(ap(x) + bq(x)) = (ap(-1) + bq(-1), qp'(1) + bq'(-1))$$

y

$$\begin{aligned} af(p(x)) + bf(q(x)) &= a(p(-1), p'(1)) + b(q(-1), q'(1)) = \\ &= (ap(-1), ap'(1)) + (bq(-1), bq'(1)) = (ap(-1) + bq(-1), qp'(1) + bq'(-1)) \end{aligned}$$

(iii) *Calcular las ecuaciones paramétricas del núcleo $ker(f)$ en la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Hallamos primero la matriz asociada a f en las base canónicas $C = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $C_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} f(1) &= (1, 0) \equiv (1, 0)_{C_2} \\ f(x) &= (-1, 1) \equiv (-1, 1)_{C_2} \\ f(x^2) &= (1, 2) \equiv (1, 2)_{C_2} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$F_{C_2C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora el núcleo está formado por los polinomios de coordenadas $(a_0, a_1, a_2)_C$ que cumplen:

$$F_{C_2C} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a_0 - a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0.$$

Esas dos ecuaciones (independientes porque no son proporcionales) serían las impícitas del núcelo. Pasamos a paramétricas resolviendo el sistema:

$$a_1 = -2a_2, \qquad a_0 = a_1 - a_2 = -3a_2$$

Las paramétricas quedan:

$$a_0 = -3\lambda, \quad a_1 = -2\lambda, \quad a_2 = \lambda.$$

(iv) *Demostrar que $B = \{1, (x + 1), (x + 1)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Para que sea base B tienen que ser linealmente independientes y un sistema generador de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Equivalentemente que haya tantos vectores en B como $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ (esto se cumple obviamente). Y que sean linealmente independientes. Esto puede comprobarse viendo que el rango de la matriz de coordenadas que forman los vectores es el máximo posible. En este caso 3.

Efectivamente:

$$1 = (1,0,0)_C, \quad x+1 = (1,1,0)_C, \quad (x+1)^2 = x^2+2x+1 = (1,2,1)_C.$$

y

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

(v) *Hallar la matriz asociada a f respecto de la base B y la base $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.*

Usamos la fórmula de cambio de base, teniendo en cuenta que la matriz asociada en las bases canónicas la hemos hallado en el apartado 2:

$$F_{B'B} = M_{B'C_2}F_{C_2C}M_{CB} = M^{-1}_{C_2B'}F_{C_2C}M_{CB}$$

donde

$$M_{C_2B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$F_{B'B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(vi) *Hallar las ecuaciones implícitas de de $ker(f)$ respecto de la base B.*

Como queremos el núcleo en la base B hacemos lo mismo que en el apartado (3) pero ahora usando la matriz $F_{B'B}$. El núcleo está formado por los polinomios de coordenadas $(b_0, b_1, b_2)_B$ cumpliendo:

$$F_{C_2C}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}a_1 + 2a_2 = 0, \quad \frac{1}{2}b_0 - \frac{1}{2}a_1 - 2a_2 = 0.$$

8.– *Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos el endomorfismo:*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+ay, x+y)$$

(i) *Hallar a para que $(1,2)$ sea autovector de f.*

Para que $(1,2)$ sea autovector de f tiene que cumplirse que:

$$f(1,2) = \lambda(1,2)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Pero $f(1,2) = (1+2a, 3)$. Por tanto tiene que cumplirse que:

$$(1+2a, 3) = \lambda(1,2)$$

de donde

$$1+2a = \lambda, \qquad 3 = 2\lambda$$

Susituyendo la primera ecuación en la segunda:

$$3 = 2(1+2a) \Rightarrow 1 = 4a \Rightarrow a = 1/4.$$

(ii) *Estudiar para que valores de a el endomorfismo f es diagonalizable y/o triangularizable.*

Es triangularizable si la suma de las multiplicidades algebraicas de los autovalores de f es la dimensión del espacio donde estamos trabajando, es decir, 2.

Diagonaliza si además las multiplicidades algebraicas y geométricas de todos los autovalores coinciden.

Para analizar esto comenzamos calculando el polinomio característico. Sus raíces serán los autovalores. La matriz asociada a f en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y el polinomio característico:

$$p_f(\lambda) = |F_c - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - a = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - a.$$

Calculamos sus raíces:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4+4a}}{2} = 1 \pm \sqrt{a}$$

Distinguimos entonces tres casos:

- Si $a < 0$, la ecuación no tiene solución. No hay autovalores reales y por tanto NI triangulariza, NI diagonaliza.

- Si $a = 0$, la ecuación tiene una única raíz $\lambda_1 = 1$ con mutliplicidad algebraica 2. Por tanto triangulariza. La multiplicidad geométrica sería:

$$mg(1) = 2 - rango(F_C - 0 \cdot Id) = 2 - rango\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 2$$

Como no coincide con la algebraica NO diagonaliza.

- Si $a > 0$, es decir, $a > 0$ hay dos autovalores cada uno de ellos con multiplicidad algebraica 1:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{a}, \qquad \lambda_2 = 1 - \sqrt{a}$$

La suma de algebraicas es dos y por tanto triangulariza. Además como las algebraicas son 1 y $1 \leq m.g. \leq m.a$ automáticamente las geométricas también son 1 y por tanto diagonaliza.

En resumen:

- Triangulariza si y sólo si $a \geq 0$.

- Diagonaliza si y sólo si $a > 0$.

(iii) *¿Existe algún valor de a para el cuál f sea la aplicación proyección sobre un subespacio paralelamente a otro?.*

Sabemos que en una determinada base la matriz de una proyección es diagonal con 1s y 0s en la diagonal; por tanto esos deberían de ser sus autovalores. Hemos visto que para que diagonalice tiene que ocurrir que $a > 0$ y los autovalores son:

$$1 - \sqrt{a} \text{ y } 1 + \sqrt{a}$$

Pero el seguno de ello siempre es mayor que 1: no es una proyección.

9.– Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar los autovalores y autovectores de A.*

Los autovalores son las raíces el polinomio caraterístico:

$$p(\lambda) = |A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 2^2) = (1-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

Los autovalores son entonces:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$$

todos ellos con multiplicidad algebraica 1.

Los autovectores asociados a $\lambda_1 = -1$ son:

$$(A-(-1)Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x+2y=0, \quad x+y+2z=0$$

Resolviendo en función de un parámetro se obtiene:

$$x = \lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = 0.$$

de donde $S_{-1} = \mathcal{L}\{(1,-1,0)\}$.

Los autovectores asociados a $\lambda_2 = 1$ son:

$$(A-1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y=0, \quad x=0, \quad x+y=0$$

Resolviendo en función de un parámetro se obtiene:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \lambda.$$

de donde $S_1 = \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$.

Los autovectores asociados a $\lambda_3 = 3$ son:

$$(A-3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x+2y=0, \quad 2x-2y=0, \quad x+y-2z=0$$

Resolviendo en función de un parámetro se obtiene:

$$x = \lambda, \quad y = \lambda, \quad z = \lambda.$$

de donde $S_3 = \mathcal{L}\{(1,1,1)\}$.

(ii) *Calcular una matriz diagonal D y una matriz inversible P tales que $P^{-1}AP = D$.*

En el apartado anterior hemos visto que existen tales matrices, es decir, que diagonalizar por semejanza porque existe una base de autovectores.

La matriz diagonal es la formada por los autovalores y la matriz P la formada por los autovectores puestos en columna,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) *Calcular $traza(A^{10})$.*

La traza se mantiene por semejanza, es decir, si $P^{-1}AP = D$, entonces $P^{-1}A^{10}P = D^{10}$ y:

$$traza(A^{10}) = traza(D^{10}) = traza\begin{pmatrix} (-1)^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} = 1+1+3^{10} = 2+3^{10} = 59051.$$