

1.— Con los diez dígitos del 0 al 9 y las letras A, B, C se van a formar claves de siete caracteres: cada una de ellas con exactamente cinco números y dos letras.

- (i) ¿Cuántas claves distintas pueden formarse en las que los números no pueden repetirse pero las letras sí?
- (ii) ¿Cuántas pudiendo repetir letras y números, pero de manera que las dos letras no estén juntas?

(1 punto)

2.— Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \\ j + 1 - i & \text{si } i < j \end{cases}$$

- (i) Escribir la matriz P_4 y hallar $\det(P_4)$.
- (ii) Para cualquier $n \geq 2$, hallar $\det(P_n)$, $\text{rango}(P_n)$ y $\text{traza}(P_n)$.

(1 punto)

3.— Hallar una matriz diagonal D congruente con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y una matriz inversible P tal que $P^t D P = A$. ¿Existe alguna matriz diagonal D' con traza cero congruente con A ? En caso afirmativo calcularla.

(1 punto)

4.— Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & a & 6 \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$

- (i) Estudiar para que valores de a, b las matrices son equivalentes por filas.
- (ii) Hallar (si existe) una matriz $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ inversible tal que $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1.2 puntos)

5.— Sea A una matriz cuadrada 5×5 . Analizar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (i) Si $A^t = -A$ entonces $\det(A) = 0$.
- (ii) $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^2)$.
- (iii) Si A es inversible entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^2)$.
- (iv) Si A es simétrica y $\det(A) > 0$ entonces A es congruente con la matriz Id .

(1.2 puntos)

6.— En el espacio vectorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ consideramos los subconjuntos $S = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) | A = A^t\}$ (matrices simétricas) y $H = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$ (matrices hemisimétricas).

- (i) Probar que H es un subespacio vectorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (ii) Demostrar que el conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (iii) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de H en la base B .
- (iv) Sabiendo que S es también subespacio, probar que S y H son subespacios suplementarios.
- (v) Calcular la matriz que es proyección de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sobre H paralelamente a S .

(1.3 puntos)

7.— Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(p(x)) = (p(-1), p'(1))$$

- (i) Hallar $f(x^2 - 1)$.
- (ii) Demostrar que f es una aplicación lineal.
- (iii) Calcular las ecuaciones paramétricas del núcleo $\ker(f)$ en la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (iv) Demostrar que $B = \{1, (x+1), (x+1)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (v) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base B y la base $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
- (vi) Hallar las ecuaciones implícitas de $\ker(f)$ respecto de la base B .

(1.3 puntos)

8.— Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos el endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + ay, x + y)$$

- (i) Hallar a para que $(1, 2)$ sea autovector de f .
- (ii) Estudiar para que valores de a el endomorfismo f es diagonalizable y/o triangularizable.
- (iii) ¿Existe algún valor de a para el cuál f sea la aplicación proyección sobre un subespacio paralelamente a otro?.

(1 punto)

9.— Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar los autovalores y autovectores de A .
- (ii) Calcular una matriz diagonal D y una matriz inversible P tales que $P^{-1}AP = D$.
- (iii) Calcular $\text{traza}(A^{10})$.

(1 punto)

1.— Cos dez díxitos do 0 ó 9 e as letras A, B, C vanse formar claves de sete caracteres: cada unha delas con exactamente cinco números e dúas letras.

- (i) Cantas claves distintas poden formarse nas que os números non poden repetirse pero as letras si?.
- (ii) Cantas podendo repetir letras e números, pero de maneira que as dúas letras non estean xuntas?.

(1 punto)

2.— Dado $n \in \mathbb{N}$ se define a matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \\ j + 1 - i & \text{si } i < j \end{cases}$$

- (i) Escribir a matriz P_4 e atopar $\det(P_4)$.
- (ii) Para calquer $n \geq 2$, atopar $\det(P_n)$, $\text{rango}(P_n)$ e $\text{traza}(P_n)$.

(1 punto)

3.— Atopar unha matriz diagonal D congruente con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e unha matriz inversible P tal que $P^t D P = A$. Existe algunha matriz diagonal D' con traza cero congruente con A ? En caso afirmativo calculala.

(1 punto)

4.— Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & a & 6 \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$

- (i) Estudiar para que valores de a, b as matrices son equivalentes por filas.

- (ii) Atopar (se existe) unha matriz $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ inversible tal que $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1.2 puntos)

5.— Sexa A unha matriz cadrada 5×5 . Analizar a veracidade ou falsidade das seguintes afirmacións:

- (i) Se $A^t = -A$ entón $\det(A) = 0$.
- (ii) $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^2)$.
- (iii) Se A é inversible entón $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^2)$.
- (iv) Se A é simétrica e $\det(A) > 0$ entón A é congruente coa matriz Id .

(1.2 puntos)

6.— No espazo vectorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ consideramos os subconxuntos $S = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) | A = A^t\}$ (matrices simétricas) e $H = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$ (matrices hemisimétricas).

- (i) Probar que H é un subespazo vectorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (ii) Demostrar que o conxunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é unha base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (iii) Atopar as ecuacións paramétricas e implícitas de H na base B .
- (iv) Sabendo que S é tamén subespazo, probar que S e H son subespazos suplementarios.
- (v) Calcular a matriz que é proxección de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sobre H paralelamente a S .

(1.3 puntos)

7.— Sexa $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de polinomios de grao menor ou igual que 2. Se considera a aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(p(x)) = (p(-1), p'(1))$$

- (i) Atopar $f(x^2 - 1)$.
- (ii) Demostrar que f é unha aplicación lineal.
- (iii) Calcular as ecuacións paramétricas do núcleo $\ker(f)$ na base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (iv) Demostrar que $B = \{1, (x+1), (x+1)^2\}$ é unha base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (v) Atopar a matriz asociada a f respecto da base B e da base $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
- (vi) Atopar as ecuacións implícitas de $\ker(f)$ respecto da base B .

(1.3 puntos)

8.— Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos o endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + ay, x + y)$$

- (i) Atopar a para que $(1, 2)$ sexa autovector de f .
- (ii) Estudiar para que valores de a o endomorfismo f é diagonalizable e/ou triangularizable.
- (iii) Existe algún valor de a para o cal f sexa a aplicación proxección sobre un subespazo paralelamente a outro?.

(1 punto)

9.— Sexa a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Atopar os autovalores e autovectores de A .
- (ii) Calcular unha matriz diagonal D e unha matriz inversible P tales que $P^{-1}AP = D$.
- (iii) Calcular $\text{traza}(A^{10})$.

(1 punto)